习题四(A)

1. 解:(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 4\\ 3 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda-6=(\lambda-6)(\lambda+1)=0$

得特征值 $\lambda_1=6,\lambda_2=-1.$

对于 $\lambda_1=6$, 解对应的齐次线性方程组 $(6E-A)X=0$,

可得它的一个基础解系 $\alpha_1=(1,-1)^T$,所以, A 的属于特征值 6 的全部特征向量为 $c_1\alpha_1,(c_1\neq 0,$ 为任意常数)

对于 $\lambda_2=-1$, 解对应的齐次线性方程组 $(-E-A)X=0$,

可得它的一个基础解系 $\alpha_2=(4,3)^T$,所以, A 的属于特征值 -1 的全部特征向量为 $c_2\alpha_2,(c_2\neq 0,$ 为任意常数)

(2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1)=0$

得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1,$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$, 解对应的齐次线性方程组 $(2E-A)X=0$,

可得它的一个基础解系 $\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T$,所以, A 的属于特征值 2 的全部特征向量为 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2,(c_1,c_2$ 为不全为零的任意常数)

对于 $\lambda_3=1$, 解对应的齐次线性方程组 $(E-A)X=0$,

可得它的一个基础解系 $\alpha_3=(-1,0,1)^T$,所以, A 的属于特征值 1 的全部特征向量为 $c_3\alpha_3,(c_3\neq 0,$ 为任意常数).

(3) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 3 & -3\\ -3 & \lambda+5 & -3\\ -6 & 6 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-4)=0$

得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=4$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=-2$, 解对应的齐次线性方程组 $(-2E-A)X=0$,

可得它的一个基础解系 $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T$,所以, A 的属于特征值 -2 的全部特征向量为 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$,(c_1,c_2 为不全为零的任意常数)

对于 $\lambda_3=4$, 解对应的齐次线性方程组 $(4E-A)X=0$,

可得它的一个基础解系 $\alpha_3=(1,1,2)^T$,所以, A 的属于特征值 4 的全部特征向量为 $c_3\alpha_3$,($c_3\neq 0$, 为任意常数).

(4) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$

得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$, 解对应的齐次线性方程组 $(E-A)X=0$,

可得它的一个基础解系 $\alpha_1=(0,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$,所以, A 的属于特征值 1 的全部特征向量为 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$,(c_1,c_2 为不全为零的任意常数)

对于 $\lambda_3=-1$, 解对应的齐次线性方程组 $(-E-A)X=0$,

可得它的一个基础解系 $\alpha_3=(-1,0,1)^T$.,所以, A 的属于特征值 -1 的全部特征向量为 $c_3\alpha_3$,($c_3\neq 0$, 为任意常数).

2. 解: (1) $\because A=0, \therefore \left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^n=0$

得特征值 $\lambda=0$（n 重）, 解齐次线性方程组 $(0E-0)X=0$,

可知 X 可取任一向量, $\therefore$ 特征向量为任一非零 n 维列向量.

(2) $\because A=aE, \therefore \left|\lambda E-aE\right|=\begin{vmatrix}\lambda-a & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a)^n=0$

得特征值 $\lambda=a$（n 重）, 解齐次线性方程组 $(aE-aE)X=0$,

可知 X 可取任一向量, $\therefore$ 特征向量为任一非零 n 维列向量.

3. 解: $\det A=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=4, \quad trA=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2.$

4. 解: 设 α 是 A^{-1} 的对应于特征值 λ 的特征向量, 即 $A^{-1}\alpha=\lambda\alpha$, 则

$AA^{-1}\alpha=\lambda\left(A\alpha\right)$, 即 $\dfrac{1}{\lambda}\alpha=A\alpha$, 从而 $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ k\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}1\\ k\end{pmatrix}$,

可得 $\begin{cases}3+k=\dfrac{1}{\lambda}\\ 5-k=\dfrac{1}{\lambda}k\end{cases}$, 解之得, $k=-5$ 或 $k=1$.

5. 证明: 设 α 是 A 的对应于特征值 λ_0 的特征向量

(1) $\because A\alpha=\lambda_0\alpha \therefore (kA)\alpha=k(A\alpha)=k(\lambda_0\alpha)=(k\lambda_0)\alpha.$

即 $k\lambda_0$ 是 kA 的一个特征值.

(2) 当 $m=2$ 时, $A^2\alpha=A\left(A\alpha\right)=A\left(\lambda\alpha\right)=\lambda\left(A\alpha\right)=\lambda^2\alpha$

即 λ^2 是 A^2 的一个特征值.

设 λ_0^{m-1} 是矩阵 A^{m-1} 的一个特征值, 则 $A^{m-1}\alpha=\lambda_0^{m-1}\alpha$, 于是

$A^m\alpha=A(A^{m-1}\alpha)=\lambda_0^{m-1}A\alpha=\lambda_0^m\alpha$. 即 λ_0^m 是矩阵 A^m 的一个特征值.

(3) $\because A$ 可逆, 故 $\lambda_0\neq 0$

又 $A\alpha=\lambda_0\alpha$,$\therefore A^{-1}A\alpha=A^{-1}\lambda_0\alpha$,$\therefore \alpha=\lambda_0 A^{-1}\alpha$,$\therefore A^{-1}\alpha=\dfrac{1}{\lambda_0}\alpha$.

即 $\dfrac{1}{\lambda_0}$ 是矩阵 A^{-1} 的一个特征值

(4) $\because A^*=|A|A^{-1}$,由(1),(3) 可得 $A^*\alpha=\dfrac{\det A}{\lambda_0}\alpha$,

即 $\dfrac{\det A}{\lambda_0}$ 是矩阵 A^* 的一个特征值,

(5) $\because A\alpha=\lambda_0\alpha \quad \therefore kE\alpha-A\alpha=k\alpha-\lambda_0\alpha \therefore (kE-A)\alpha=(k-\lambda_0)\alpha$.

即 $k-\lambda_0$ 是矩阵 $kE-A$ 的一个特征值.

6. 证明: 设 $A\alpha=\lambda\alpha$, 则

$\alpha^T A^T=\lambda\alpha^T \quad \therefore \alpha^T A^T A\alpha=\lambda^2\alpha^T\alpha, \therefore \alpha^T\alpha-\lambda^2\alpha^T\alpha=0$,

$\therefore (1-\lambda^2)\alpha^T\alpha=0$

$\because \alpha\neq 0, \therefore \alpha^T\alpha\neq 0 \therefore 1-\lambda^2=0 \therefore \lambda=\pm 1$.

7. 证明:(反证法)假设 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$ 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量,则

$A(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2)=\lambda(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2)$.

$\because A(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2)=c_1A\alpha_1+c_2A\alpha_2=c_1\lambda_1\alpha_1+c_2\lambda_2\alpha_2$,

$\lambda(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2)=c_1\lambda\alpha_1+c_2\lambda\alpha_2$,

$c_1\lambda_1\alpha_1+c_2\lambda_2\alpha_2=c_1\lambda\alpha_1+c_2\lambda\alpha_2$

$\Rightarrow c_1(\lambda-\lambda_1)\alpha_1+c_2(\lambda-\lambda_2)\alpha_2=0$.

$\because \lambda_1\neq\lambda_2$， $\therefore \alpha_1,\alpha_2$ 线性无关.

于是，$c_1\left(\lambda-\lambda_1\right)=c_2\left(\lambda-\lambda_2\right)=0$.

$\because c_1,c_2\neq 0$， $\therefore \lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=0, \therefore \lambda_1=\lambda_2$，矛盾.▌

8. 证明: $\because\ A \sim B\ \therefore$ $\exists$ 可 逆 P 使 得 $P^{-1}AP=B$

(1) $|B|=\left|P^{-1}AP\right|=|P|^{-1}|A||P|=|A|$

(2) $r(B)=r\left(P^{-1}AP\right)=r(AP)=r(A)$

(3) $B^T=\left(P^{-1}AP\right)^T=P^TA^T\left(P^{-1}\right)^T=P^TA^T\left(P^T\right)^{-1}$, 从而 $A^T\sim B^T$.

(4) $B^{-1}=\left(P^{-1}AP\right)^{-1}=P^{-1}A^{-1}\left(P^{-1}\right)^{-1}$, 从而 $A^{-1}\sim B^{-1}$.

9. 证明: $\because A\sim B\ \therefore \exists$可逆$P$使得$P^{-1}AP=B,$

$\because C\sim D\ \therefore \exists$可逆$Q$使得$Q^{-1}CQ=D,$

$$\therefore \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P^{-1}AP & 0 \\ 0 & Q^{-1}CQ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

10. 解:均可对角化

(1) 取 $P=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

(2) 取 $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

(3)取 $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$.

(4)取 $P=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$.

11. 解:

(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2=0$, 得 $\lambda=2$

对于 $\lambda=2$, 解对应的齐次线性方程组 $(2E-A)X=0$,

可得它的一个基础解系 $\alpha_1=(1,1)^T$,从而不可对角化.

(2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-2&-3\\-2&\lambda-1&-2\\1&2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-1)^2=0$

可得 $\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=1$, $\because r(E-A)=2\neq1$,从而不可对角化.

(3) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda-4&2\\3&3&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-6)=0$

可得 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=6$,

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$, 解对应的齐次线性方程组 $(2E-A)X=0$,

可得它的一个基础解系 $\alpha_1=(1,-1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$,

对于 $\lambda_3=6$, 解对应的齐次线性方程组 $(6E-A)X=0$,

可得它的一个基础解系 $\alpha_3=(1,-2,3)^T$.

令 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$, 可得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}$.

$$(4)\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0 & 0\\ 2 & -4 & \lambda-5 & 3\\ -7 & -3 & -3 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^4=0$$

可得 $\lambda=2$(四重). $\because r(2E-A)=1\neq 0$,从而不可对角化.

12. 解:矩阵 D 是对角矩阵, 而各选项中的矩阵与 D 有相同的特征值

$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=3$,故只需判断各矩阵能否对角化.

（1）显然， $A_1\sim\Lambda$, 从而与 D 相似

（2） $r\left(2E-A_2\right)=2\neq 1$, 故矩阵 A_2 不可对角化, 从而不可能与 D 相似.

（3） $r\left(2E-A_3\right)=1$, 故矩阵 A_3 可对角化, 从而与 D 相似

（4） $r\left(2E-A_4\right)=2\neq 1$, 故矩阵 A_4 不可对角化, 从而不可能与 D 相似

13. 解:（1） $\because A\sim B\ \therefore \det A=\det B, trA=trB$

从而 $\det A=-2=\det B=-2y, trA=2+x=trB=2+y-1$

解得 $x=0,y=1$

（2） $\because A\sim B$, $\therefore A,B$ 有相同的特征值, 从而 A 的特征值为 $2,1,-1$

当 $\lambda=2$ 时, 解对应的齐次线性方程组 $\left(2E-A\right)X=0$, 得基础解系

$\alpha_1=\left(1,0,0\right)^T$.

当 $\lambda=1$ 时, 解对应的齐次线性方程组 $\left(E-A\right)X=0$, 得基础解系

$\alpha_2=\left(0,1,1\right)^T$

当 $\lambda=-1$ 时, 解对应的齐次线性方程组 $\left(-E-A\right)X=0$, 得基础解系

$\alpha_3=\left(0,1,-1\right)^T$

令 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP=B.$

14. 解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\0&\lambda-2&0\\0&1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda^2-2)(\lambda-1)=0,$

可得 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1$

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时, 解对应的齐次线性方程组 $(2E-A)X=0$,

可得它的一个基础解系 $\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T$,

当 $\lambda_3=1$ 时, 解对应的齐次线性方程组 $(E-A)X=0$,

可得它的一个基础解系 $\alpha_3=(1,0,-1)^T$.

令 $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}$

则 $(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP=P^{-1}\begin{pmatrix}2^n&&\\&2^n&\\&&1\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}2^n&2^n-1&2^n-1\\0&2^n&0\\0&1-2^n&1\end{pmatrix}.$

15. 解: 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$,

其中 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$

$$\therefore A = P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^3 = P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2^3 & \\ & & 3^3\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -7 & 7 \\ -26 & 1 & 26 \\ -26 & -7 & 34\end{pmatrix}.$$

16. 证明: $\because A \sim B$, 从而存在可逆矩阵 P^{-1}, 使得 $P^{-1}AP = B$

所以 $B^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P = P^{-1}AP = B$.

17. 解: (1) $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$

可得 $\lambda_1 = 0,\quad \lambda_2 = 1,\quad \lambda_3 = -1,$

对于 $\lambda_1 = 0$, 解对应的齐次线性方程组 $(0E - A)X = 0$, 得其基础解系

$\alpha_1 = (0,1,0)^T$.

对于 $\lambda_2 = 1$, 解对应的齐次线性方程组 $(E - A)X = 0$, 得其基础解系

$\alpha_2 = (1,0,1)^T$.

对于 $\lambda_3 = -1$, 解对应的齐次线性方程组 $(-E - A)X = 0$, 得其基础解系

$\alpha_3 = (1,0,-1)^T$.

将向量 α_2, α_3 单位化可得 $\beta_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \beta_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

令 $Q=\left(\alpha_1,\beta_2,\beta_3\right)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,则 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

(2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3)=0.$

可得 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=3$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=0$, 解对应的齐次线性方程组 $\left(0E-A\right)X=0$, 得其基础解

系 $\alpha_1=(-1,1,0)^T,\alpha_2=\left(-1,0,1\right)^T$.

对于 $\lambda_2=3$, 解对应的齐次线性方程组 $\left(3E-A\right)X=0$, 得其基础解系

$\alpha_3=(1,1,1)^T$.

把向量 α_1,α_2 正交化, 有 $\beta_1=\left(-1,1,0\right)^T,\beta_2=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^T$

再将向量 β_1,β_2,α_3 单位化, 有

$\gamma_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^T,\gamma_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T,\gamma_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$

令 $Q=\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\right)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, 则 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

(3) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-2 & 2\\ 0 & 2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)=0.$

可得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$

对于 $\lambda_1=-1$，解对应的齐次线性方程组 $(-E-A)X=0$，得其基础解系

$\alpha_1=(2,2,1)^T$.

对于 $\lambda_2=2$，解对应的齐次线性方程组 $(2E-A)X=0$，得其基础解系

$\alpha_2=(2,-1,-2)^T$.

对于 $\lambda_3=5$，解对应的齐次线性方程组 $(5E-A)X=0$，得其基础解系

$\alpha_3=(1,-2,2)^T$.

将向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化可得

$\gamma_1=\frac{1}{3}(2,2,1)^T$，$\gamma_2=\frac{1}{3}(2,-1,-2)^T$，$\gamma_3=\frac{1}{3}(1,-2,2)^T$.

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，则 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & 5\end{pmatrix}$.

(4) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 1 & -1\\ 1 & \lambda-2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & \lambda-2 & 1\\ -1 & 1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda-5)=0.$

可得 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1,\lambda_4=5$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，解对应的齐次线性方程组 $(E-A)X=0$，得其基础解系 $\alpha_1=(1,1,0,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1,0)^T$，$\alpha_3=(-1,0,0,1)^T$

对于 $\lambda_4=5$，解对应的齐次线性方程组 $(5E-A)X=0$，得其基础解系

$\alpha_4=(1,-1,-1,1)^T$

把向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交化，有

$$\beta_1=(1,1,0,0)^T,\beta_2=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right)^T,\beta_3=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right)^T$$

将向量 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_4$ 单位化可得

$$\gamma_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)^T,\gamma_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0\right),$$

$$\gamma_3=\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)^T,\gamma_4=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T$$

令 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 5\end{pmatrix}$.

18. 解：(1) 设与向量 α_1 正交的向量为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$，则

$$\alpha_1{}^T\alpha=(0,1,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_2+x_3=0,$$

解此线性方程组，可得其基础解系 $\alpha_2=(1,0,0)^T,\alpha_3=(0,-1,1)^T$

从而 A 对应于特征值1的特征向量为 $\alpha_2=(1,0,0)^T,\alpha_3=(0,-1,1)^T$.

(2)将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$单位化:

$$\beta_1=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,\beta_2=(1,0,0)^T,\beta_3=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$$

令$Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$

则Q为正交矩阵, 且$Q^{-1}AQ=\Lambda$, 所以

$$A=Q\Lambda Q^{-1}=Q\Lambda Q^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

19. 解:由于A中各行元素之和小于1, 由定理 4.17, A的所有特征值的模小于1, 再由定理 4.15, 可知$\lim\limits_{n\to\infty}A^n=0.$

20. 解: (1) $\begin{pmatrix}R_t\\F_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.1&-0.15\\0.1&0.85\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_{t-1}\\F_{t-1}\end{pmatrix}$

$\therefore x(t)=\begin{pmatrix}1.1&-0.15\\0.1&0.85\end{pmatrix}x(t-1)$, 令$A=\begin{pmatrix}1.1&-0.15\\0.1&0.85\end{pmatrix}$.

(2) $x(t)=Ax(t-1)=\cdots=A^tx(0)$,

$|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-0.95)=0$

可得$\lambda_1=1$, $\lambda_2=0.95$,

当$\lambda_1=1$时,解对应的齐次线性方程组$(E-A)X=0$,得基础解系

$\alpha_1=(3,2)^T$

当 $\lambda_2 = 0.95$ 时,解对应的齐次线性方程组 $(0.95E - A)X = 0$,得基础解系

$\alpha_2 = (1,1)^T$.

令 $P = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\quad \therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.95 \end{pmatrix}$

$$A^t = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.95 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 3-2\times 0.95^t & -3+3\times 0.95^t \\ 2-2\times 0.95^t & -2+3\times 0.95^t \end{pmatrix}$$

$$\therefore x(t) = A^t\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+4\times 0.95^t \\ 4+4\times 0.95^t \end{pmatrix}.$$

(3) $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ 相互依存,使数量趋于稳定.

21. 解:(1) $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $E - A = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0.6 & -0.3 \\ -0.1 & -0.1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = (E-A)^{-1}Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 & 6 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$