第三章　线性方程组　（P76）

习题 3．1 引例与线性方程组（P79）

1．写出下列方程组的矩阵形式：

（1）$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0 \\ 3x_1+x_2-2x_3-7x_4=0 \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0 \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2x+y-z+w=1 \\ 3x-2y+z-3w=4 \\ x+4y-3z+5w=-2 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} \lambda x_1+\lambda x_2+2x_3=1 \\ \lambda x_1+(2\lambda-1)x_2+3x_3=1 \\ \lambda x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=2\lambda-1 \end{cases}$

解：(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 2 \\ \lambda & 2\lambda-1 & 3 \\ \lambda & \lambda & \lambda+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2\lambda-1 \end{pmatrix}$

习题 3．2 齐次线性方程组（P90）

1．求下列齐次线性方程组的一个基础解系和通解：

（1）$\begin{cases} x_1-x_2+5x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ x_1+3x_2-9x_3+7x_4=0 \\ 3x_1-x_2+8x_3+x_4=0 \end{cases}$

解：$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -14 & 8 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{2r_1+r_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

等价方程组:$\begin{cases} 2x_1+3x_3+2x_4=0 \\ 2x_2-7x_3+4x_4=0 \end{cases}$，分别取$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得

基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}-3\\7\\2\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$,

通解：$\boldsymbol{x}=C_1\xi_1+C_2\xi_2$（$C_1$，$C_2$为任意常数）（$C_1$，$C_2$为任意常数）

（2）$\begin{cases}x_1 \quad\quad +x_3=0\\x_1+3x_2+4x_3=0\\x_1+2x_2+3x_3=0\\x_1+\ \ x_2+2x_3=0\end{cases}$

解：$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&3&4\\1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_4\\r_4-r_1}]{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_4-r_2}\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1&x_2&x_3\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

基础解系：$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，通解：$\mathbf{x}=C\boldsymbol{\xi}$（C 为任意常数）

（3）$\begin{cases}2x+\ \ y-\ \ z+w=0\\4x+2y-2z+w=0\\2x+\ \ y-\ \ z-w=0\end{cases}$

解：$$\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\4&2&-2&1\\2&1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_3]{r_3\div(-2)}\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1&x_2&x_3&x_4\end{matrix}\\\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

等价方程组为：$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=0\\x_4=0\end{cases}$，分别取$\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$，得

基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$，通解：$\mathbf{x}=C_1\xi_1+C_2\xi_2$（$C_1$，$C_2$为任意常数）

（4）$\begin{cases} x_1+x_2+\ \ x_3+4x_4-3x_5=0 \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4-\ \ x_5=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=0 \\ 3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=0 \end{cases}$

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2-2r_3 \\ r_1+r_3}]{r_4-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

等价方程组：$\begin{cases} x_1=-2x_3-x_4+2x_5 \\ x_2=\ \ x_3-3x_4+\ x_5 \end{cases}$，分别取$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得

基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

通解：$\mathbf{x}=C_1\xi_1+C_2\xi_2+C_3\xi_3$（$C_1$，$C_2$为任意常数）

2．λ取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\lambda x_3=0 \\ -x_1+\lambda x_2+\ \ x_3=0 \\ x_1-\ \ x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

（1）只有零解；
（2）有非零解，并求出其通解。

解：$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ -1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1,r_3-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1+\lambda & \lambda+1 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_3+2r_2}(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}=(1+\lambda)(4-\lambda)$$

（1）当$D\neq 0$时，即$\lambda\neq -1$且$\lambda\neq 4$时，方程组只有零解。

（2）当 $D=0$ 时，即 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=4$ 时，方程组有非零解。

当 $\lambda=-1$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&-1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_1+r_3}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&0\\0&-2&3\end{pmatrix}$

等价方程组：$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}x_3\\x_2=\dfrac{3}{2}x_3\end{cases}$，取自由未知量 $x_3=2$，得通解：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\ (k\in R)$

当 $\lambda=4$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&1&4\\-1&4&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&1&4\\0&5&5\\0&-2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+2r_2]{r_2\div 5}\begin{pmatrix}1&1&4\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

等价方程组 $\begin{cases}x_1=-3x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$，取自由未知量 $x_3=1$，得通解：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}\ (k\in R)$

习题 3.3 非其次线性方程组（P97）

1．求下列非齐次线性方程组的解：

（1）$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=1\\x_1-3x_2+4x_3=2\\11x_1-12x_2+17x_3=13\end{cases}$

解：　对增广矩阵 $\overline{A}$ 施行初等行变换

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&-3&4&2\\11&-12&17&13\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-3&4&2\\2&1&-1&1\\11&-12&17&13\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-11r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-3&4&2\\0&7&-9&-3\\0&21&-27&-9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{7}r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&-3&4&2\\0&1&\frac{-9}{7}&\frac{-3}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+3r_2}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{7}&\frac{5}{7}\\0&1&\frac{-9}{7}&\frac{-3}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{7}x_3+\dfrac{5}{7}\\x_2=-\dfrac{9}{7}x_3-\dfrac{3}{7}\end{cases}$$

取 $x_3=7k$，得通解：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\9\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{5}{7}\\-\frac{3}{7}\\0\end{pmatrix}\quad(k\in R)$

（2）$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\x_1+2x_2+x_3-x_4=2\\x_1+x_2+2x_3+x_4=3\end{cases}$

解：对增广矩阵 $\overline{A}$ 施行初等行变换

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\1&2&1&-1&2\\1&1&2&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&-1&2\\2&1&-1&1&1\\1&1&2&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&-1&2\\0&-3&-3&3&-3\\0&-1&1&2&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&-1&2\\0&1&1&-1&1\\0&-1&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0\\0&1&1&-1&1\\0&0&2&1&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}r_3]{}\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0\\0&1&1&-1&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{3}{2}&1\\0&1&0&-\frac{3}{2}&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$$

等价方程组：$\begin{cases}x_1=-\frac{3}{2}x_4+1\\x_2=\frac{3}{2}x_4\\x_3=-\frac{1}{2}x_4+1\end{cases}$，取 $x_4=2k$，得通解：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-3\\3\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}(k\in R)$

2. λ 取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$$

（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解。

解：系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}\underline{\underline{c_1-c_3,c_2-c_3}}\begin{vmatrix}\lambda-1&0&1\\0&\lambda-1&1\\1-\lambda&1-\lambda&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_3-c_1}}\ (\lambda-1)^2\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&1\\-1&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

（1）当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq-2$时，$|A|\neq0$，方程组有唯一解。

（2）当$\lambda=-2$时，增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-2&1&-2\\-2&1&1&1\\1&1&-2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&-2&1&-2\\0&-3&3&-3\\0&-3&-3&6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-2&1&-2\\0&-3&3&-3\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

$\because R(A)=2\neq R(\overline{A})=3$。故无解。

（3）当且$\lambda=1$时，$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\because R(A)=R(\overline{A})=1$，故有无穷多解。

3．设 $\begin{cases}x_1-x_2=a_1\\x_2-x_3=a_2\\x_3-x_4=a_3\\x_4-x_5=a_4\\x_5-x_1=a_5\end{cases}$

证明该方程组有解的充分必要条件是$\sum_{i=1}^{5}a_i=0,$在有解的情况下求其通解。

解：方程组的增广矩阵是：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\-1&0&0&0&1&a_5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_5+r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\0&0&0&0&0&\sum_{i=1}^{5}a_i\end{pmatrix}$$

由此可见 $R(A)=4$，方程组有解的充要条件是 $R(A)=R(\overline{A})$，而 $R(A)=R(\overline{A})$ 的充要条件是 $\sum_{i=1}^{5} a_i = 0$。

当方程组有解时，由

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+r_2]{r_3+r_4,\, r_2+r_3} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \text{常数} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & a_1+a_2+a_3+a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & a_2+a_3+a_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & a_3+a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

得等价方程组 $\begin{cases} x_1 = x_5 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ x_2 = x_5 + a_2 + a_3 + a_4 \\ x_3 = x_5 + a_3 + a_4 \\ x_4 = x_5 + a_4 \end{cases}$，取 $x_5 = k$，得通解：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3+a_4 \\ a_2+a_3+a_4 \\ a_2+a_3 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k \in R)$$

4．设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 2，已知 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4$ 为其四个解向量，且

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_3 + \boldsymbol{\eta}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

求其通解。

解：设四元非齐次线性方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，对应的齐次线性方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$。已知 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的四个解向量，故有 $A\boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{b}(i=1,2,3,4)$。

而 $\xi_1 = 2\boldsymbol{\eta}_1 - (\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)$，$\xi_2 = 2\boldsymbol{\eta}_1 - (\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4)$ 满足

$$A\xi_1 = A[2\boldsymbol{\eta}_1 - (\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)] = 2\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0},$$

$$A\xi_2 = A[2\boldsymbol{\eta}_1 - (\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4)] = 2\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解。且 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ 不成比例，故线性无关。

又 $R(A)=r=2,n=4,n-r=2$。即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由两个线性无关的向量组成，

故 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 可作为其基础解系，因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_1+C_1\xi_1+C_2\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\quad C_1,C_2\in\mathrm{R}$$

5．设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的 s 个解，证明：$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$ 仍是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解，其中 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$。

证明：由于 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，故有 $\boldsymbol{A}\xi_i=\boldsymbol{b}\ (i=1,2,\cdots,s)$

又 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$，则

$$A(k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s)=Ak_1\xi_1+Ak_2\xi_2+\cdots+Ak_s\xi_s$$

$$=k_1\mathbf{b}+k_2\mathbf{b}+\cdots+k_s\mathbf{b}=(k_1+k_2+\cdots+k_s)\mathbf{b}=\mathbf{b}$$

所以，$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$ 仍是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解

复习题三　　（P99）

1．设有线性方程组 $\begin{cases}a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3=d_1,\\a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3=d_2,\end{cases}$ 若 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$，问

（1）系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩是多少？

（2）增广矩阵 $\overline{\mathbf{A}}$ 的秩是多少？

（3）该方程组是否有解？有多少解？

（4）该方程组对应的齐次线性方程组是否有基础解系？

解：（1） $R(\mathbf{A})=2$

（2） $R(\overline{\mathbf{A}})=2$

（3） $R(\mathbf{A})=R(\overline{\mathbf{A}})=2$，该方程组有解。有无穷多解

（4） $R(\mathbf{A})=2<3$，所以该方程组对应的齐次线性方程组有基础解系。

2．确定 k 的值，使方程组

$$\begin{cases} x+\ \ y+kz=2, \\ 3x+4y+2z=k, \\ 2x+3y-\ \ z=1 \end{cases}$$

（1） 有唯一的解；（2）无解；（3）有无穷多解。

解：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 3 & 4 & 2 & k \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 2-3k & k-6 \\ 0 & 1 & -1-2k & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 2-3k & k-6 \\ 0 & 0 & -3+k & 3-k \end{pmatrix}$$

（1） 当 $k\neq 3$ 时，$R(A)=R(\overline{A})=3$，方程组有唯一解。

（2） 没有无解的情况。

（3） 当 $k=3$ 时，$R(\mathbf{A})=R(\overline{\mathbf{A}})=2<3$，有无穷多解。

3．已知方阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B}$ 为三阶非零矩阵，且满足 $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$，试求 λ 的值。

解：设三阶非零矩阵 $\mathbf{B}$ 按列分块为 $\mathbf{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，不妨设 $\boldsymbol{\beta}_1$ 是其非零列，则由 $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$

得： $\boldsymbol{A\beta}_1=\boldsymbol{0}$， $\boldsymbol{\beta}_1\neq\boldsymbol{0}$

根据 A 为方阵时，方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是其系数行列式 $=0$，

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underline{\underline{r_2-2r_1,r_3-3r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & \lambda+4 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix}=-5(\lambda-1)=0$$

所以 $\lambda=1$。

4．解下列方程组：

（1） $\begin{cases} x_1+\ x_2-3x_3-\ \ x_4=1 \\ 3x_1-\ x_2-3x_3+4x_4=4 \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0 \end{cases}$

解：（1） $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & -1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\div(-4)}\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{7}{4} & -\dfrac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\dfrac{3}{2} & \dfrac{3}{4} & \dfrac{5}{4}\\ 0 & 1 & -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{7}{4} & -\dfrac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得等价方程组 $\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{2}x_3-\dfrac{3}{4}x_4-\dfrac{5}{4}\\ x_2=\dfrac{3}{2}x_3+\dfrac{7}{4}x_4+\dfrac{1}{4}\end{cases}$，取 $x_3=2C_1, x_4=4C_2$，得通解：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3C_1-3C_2+\dfrac{5}{4}\\ 3C_1+7C_2-\dfrac{1}{4}\\ 2C_1\\ 4C_2\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}3\\3\\2\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-3\\7\\0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{5}{4}\\ -\dfrac{1}{4}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\quad (C_1,C_2\in R)$$

或取 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，代入等价方程组的对应齐次方程组，得到一个基础解系：

$\xi_1=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{3}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{4}\\ \dfrac{7}{4}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，并在等价方程组中令 $x_3=x_4=0$ 得一个特解：$\eta=\begin{pmatrix}\dfrac{5}{4}\\ -\dfrac{1}{4}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，

故方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}$，

即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}3\\3\\2\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-3\\7\\0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{5}{4}\\ -\dfrac{1}{4}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\quad (k_1,k_2\in R)$$

（2）$\begin{cases} 2x_1+3x_2-\ x_3-2x_4=2 \\ x_1+\ x_2+2x_3+\ x_4=5 \\ 4x_1+5x_2+3x_3\qquad =7 \end{cases}$

解（2）$\overline{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

$R(A)=2\neq R(\overline{A})=3$，方程组无解。

（3）$\begin{cases} x_1+\ x_2-3x_3\qquad -\ x_5=2 \\ x_1-\ x_2+2x_3-\ x_4\qquad =5 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=7 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=1 \end{cases}$

解（3）$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 18 & 3 & 16 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\to\cdots\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-5}{6} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{6} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

得等价方程组：$\begin{cases} x_1=\frac{5}{6}x_5+\frac{3}{2} \\ x_2=\frac{7}{6}x_5-\frac{3}{2} \\ x_3=\frac{1}{3}x_5-\frac{2}{3} \\ x_4=\frac{1}{3}x_5+\frac{1}{3} \end{cases}$，取 $x_5=6k$ 得：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}\quad (k\in R)$

5．设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩为 $n-1$。证明：必有 $(\mathbf{A}_{k1},\mathbf{A}_{k2},\cdots,\mathbf{A}_{kn})'$ 为该齐次线性方程组的一个非零解，其中 $\mathbf{A}_{kl}$ 为 a_{kl} 的代数余子式 $(l=1,2,\cdots n)$。

解：因为系数矩阵 A 的秩为 $n-1$，所以至少有一个元素的代数余子式不为零，不妨设为 a_{kl} 的代数余子式 $\mathbf{A}_{kl}\neq 0$，取 $(\mathbf{A}_{k1},\mathbf{A}_{k2},\cdots,\mathbf{A}_{kn})'$ 代入方程组，由行列式的性质得

$$\begin{cases} a_{11}A_{k1}+a_{12}A_{k2}+\cdots+a_{1n}A_{kn}=0 \\ a_{21}A_{k1}+a_{22}A_{k2}+\cdots+a_{2n}A_{kn}=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}=|A|=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}A_{k1}+a_{n2}A_{k2}+\cdots+a_{nn}A_{kn}=0 \end{cases},$$

即 $(\mathbf{A}_{k1},\mathbf{A}_{k2},\cdots,\mathbf{A}_{kn})'$ 为该齐次线性方程组的一个非零解。

6．试证：含有 n 个未知量 $n+1$ 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \\ a_{n+1,1}x_1+a_{n+1,2}x_2+\cdots+a_{n+1,n}x_n=b_{n+1} \end{cases}$$

有解的必要条件是行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ a_{n+1,1} & a_{n+2,2} & \cdots & a_{n+1,n} & b_{n+1} \end{vmatrix}=0,$$

但这个条件不是充分的，试举一例。

证明：必要性：即证“方程组有解 $\Rightarrow |\overline{A}|=0$”

因为方程组有解，所以 $R(A)=R(\overline{A})\leq n$（未知量个数），所以 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ a_{n+1,1} & a_{n+2,2} & \cdots & a_{n+1,n} & b_{n+1} \end{vmatrix} = 0$$

行列式为 0 不是该方程组有解的充分条件，反例：$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$

$$|\overline{A}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$，但方程组无解。

7．设三维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+\lambda \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix},$$

问 λ 取何值时

（1）$\boldsymbol{\beta}$ 有 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3,$ 的唯一线性表示式，并写出该表示式；

（2）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3,$ 线性表出，但表示式不唯一；

（3）$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3,$ 的线性组合。

解：设 $\boldsymbol{\beta} = k_2\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，对应的非齐次线性方程组的增广矩阵为 $\overline{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta})$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-(1-\lambda)r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & -\lambda & -\lambda^2-2\lambda & -\lambda^2(1+\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-3\lambda & -2\lambda^2-\lambda^3+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+3) & -\lambda(\lambda^2+2\lambda-1) \end{pmatrix}$$

（1）$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示的充要条件 $R(A) = R(\overline{A}) = 3 = n$，

故当$\lambda \neq 0$且$\lambda \neq 3$时，

$$\overline{A} \xrightarrow[r_3 \div [-\lambda(\lambda+3)]]{r_2 \div \lambda} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda+3} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1-r_2-(1+\lambda)r_3]{r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{1+\lambda}{\lambda+3} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{2}{\lambda+3} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda+3} \end{pmatrix}$$

得$\begin{cases} k_1 = -\dfrac{1-\lambda}{\lambda+3} \\ k_2 = \dfrac{2}{\lambda+3} \\ k_3 = \dfrac{\lambda^2+2\lambda^2-1}{\lambda+3} \end{cases}$，故得唯一表示式：

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{1-\lambda}{\lambda+3}\boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{2}{\lambda+3}\boldsymbol{\alpha}_2 + \frac{\lambda^2+2\lambda^2-1}{\lambda+3}\boldsymbol{\alpha}_3$$

（2） 当$\lambda = 0$时，$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$R(A) = R(\overline{A}) < 3 = n$，$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$,线性表出，但表示式不唯一

（3） 当$\lambda = -3$时，$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$R(A) = 2 \neq R(\overline{A}) = 3$，即$\boldsymbol{\beta}$不能表示成$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$,的线性组合。

8．设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = a, \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = b, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 4x_5 = c, \end{cases}$$

问：（1） a,b,c为何值时，方程组无解？

（2）a,b,c为何值时，方程组有解？

（3）有解时，求其解。

解：对线性方程组的增广矩阵进行初等变换。

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0&3\\1&2&-1&2&-1&5\\1&-1&-1&-1&2&a\\-3&2&3&2&-5&b\\-1&3&1&3&-4&c\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+3r_1,r_5+r_1]{r_2-r_1,r_3-r_1,}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0&3\\0&1&0&1&-1&2\\0&-2&0&-2&2&a-3\\0&5&0&5&-5&b+9\\0&4&0&4&-4&c+3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_5-4r_2]{r_3+2r_2,r_4-5r_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0&3\\0&1&0&1&-1&2\\0&0&0&0&0&a+1\\0&0&0&0&0&b-1\\0&0&0&0&0&c-5\end{pmatrix}$$

(1) 当$a\neq-1$或$b\neq1$或$c\neq5$时，方程组无解。

(2) 当$a=-1,b=1$及$c=5$时，方程组有解.

(3) 当$a=-1,b=1$及$c=5$时，方程组的增广矩阵

$$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0&3\\0&1&0&1&-1&2\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&1&1\\0&1&0&1&-1&2\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得等价方程组$\begin{cases}x_1=x_3-x_5+1\\x_2=-x_4+x_5+2\end{cases}$，令$x_3=k_1,x_4=k_2,x_5=k_3$，得方程组的通解：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\1\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2,k_3\in R)$$

9．设$\mathbf{A},\mathbf{B}$都是n阶方阵，且$\mathbf{AB}=\mathbf{0}$，证明：$R(\mathbf{A})+R(\mathbf{B})\le n$。

解：设$\mathbf{B}$按列分块为$\mathbf{B}=(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n)$，则$\mathbf{A}(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n)=(\mathbf{0},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0})$

即$\mathbf{Ab}_i=\mathbf{0}\left(i_1=1,2,\cdots,n\right)$，$\therefore\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$为齐次方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的解向量

设$R(\mathbf{A})=r$, 方程组的解空间的秩为$R_s=n-r$, 因此$R(\mathbf{B})\le R_s=n-r$,

故有：$R(\mathbf{A})+R(\mathbf{B})\le r+R_s=r+n-r=n$

10. 设η_0是非齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的一个特解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$是其导出组的一个基础解系，

令 $\eta_1=\eta_0+\xi_1$，$\eta_2=\eta_0+\xi_2$，$\cdots$，$\eta_t=\eta_0+\xi_t$

试证该方程组的任一解可表示成如下形式：

$$k_0\eta_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t$$

其中 $k_0 + k_1 + k_2 + \cdots + k_t = 1$

解：设 $\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的任一个解，则 $\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}_0$ 是对应齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=0$ 的解，而 $\xi_{1,}\xi_2,\cdots,\xi_t$ 是方程组 $\mathbf{Ax}=0$ 的基础解系，故有 $\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}_0 = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\xi}_t$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta} &= \boldsymbol{\eta}_0 + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\xi}_t \\ &= \eta_0 + k_1(\eta_1-\eta_0) + k_2(\eta_2-\eta_0) + \cdots + k_t(\eta_t-\eta_0) \\ &= (1-k_1-k_2-\cdots-k_t)\eta_0 + k_1\eta + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t\end{aligned}$$

令 $k_0 = 1-k_1-k_2-\cdots-k_t$． 则得

$$\boldsymbol{\eta} = k_0\boldsymbol{\eta}_0 + k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\eta}_t\text{，其中 } k_0 + k_1 + k_2 + \cdots + k_t = 1$$

11．设含 n 个未知量的非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩为 $r,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$ 是其 $n-r+1$ 个线性无关的解，试证它的任一解可表示为

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1},$$

其中 $k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-r+1} = 1$

解：首先，对于满足 $k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-r+1} = 1$ 的任意实数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r+1}$，有

$$\begin{aligned}A(k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}) &= A(k_1\eta_1) + A(k_2\eta_2) + \cdots + A(k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}) \\ &= k_1A\eta_1 + k_2A\eta_2 + \cdots + k_{n-r+1}A\eta_{n-r+1} = (k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1})\mathbf{b} = \mathbf{b},\end{aligned}$$

因此 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$, 是方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解．

其次，作向量 $\xi_i = \eta_i - \eta_{n-r+1}(i=1,\cdots n-r)$，则 $\xi_i = \eta_i - \eta_{n-r+1}(i=1,\cdots n-r)$ 是对应齐次方程组 $\mathbf{Ax}=0$ 的解，且向量组 $\xi_{1,}\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关，因为，若等式

$\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \cdots + \lambda_{n-r}\xi_{n-r} = 0$ 成立，即

$$\begin{aligned}&\lambda_1(\eta_1-\eta_{n-r+1}) + \lambda_2(\eta_2-\eta_{n-r+1}) + \cdots + \lambda_{n-r}(\eta_{n-r}-\eta_{n-r+1}) \\ &= \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \cdots + \lambda_{n-r}\eta_{n-r} - (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-r})\eta_{n-r+1} = 0\end{aligned}$$

由题设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$线性无关，因此$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-r}=0$，故$\xi_{1,}\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关，因此$\xi_{1,}\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是方程组$\mathbf{Ax}=0$的基础解系，故方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的任一解向量$\beta$可表示为

$$\begin{aligned}\beta&=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r+1}\xi_{n-r}+\eta_{n-r+1}\\&=k_1\left(\eta_1-\eta_{n-r+1}\right)+k_2\left(\eta_2-\eta_{n-r+1}\right)+\cdots+k_{n-r}\left(\eta_{n-r}-\eta_{n-r+1}\right)+\eta_{n-r+1}\\&=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}+[1-(k_1+k_2+\cdots+k_{n-r})]\eta_{n-r+1}\\&=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}\end{aligned}$$

其中$k_{n-r+1}=1-(k_1+k_2+\cdots+k_{n-r})$，即$k_1+k_2+\cdots+k_{n-r}+k_{n-r+1}=1$