习题二

1、

(1)解： $\det A=\begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & -2c & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}=-5abc\neq 0$

$$\det B_1=\begin{vmatrix} -2ab & -a & 0 \\ bc & -2c & 3b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} -2ab & -a \\ bc & -2c \end{vmatrix}=a\left(5abc\right)=5a^2bc$$

$$\det B_2=\begin{vmatrix} b & -2ab & 0 \\ 0 & bc & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}=-5ab^2c$$

$$\det B_3=\begin{vmatrix} b & -a & -2ab \\ 0 & -2c & bc \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}=c\begin{vmatrix} -a & -2ab \\ -2c & bc \end{vmatrix}=c\left(-5abc\right)=-5abc$$

$$\therefore x=\frac{5a^2bc}{-5abc}=-a,\quad y=b,\quad z=c.$$

(2)解：

$$\det A=\begin{vmatrix}a&a&b\\a&b&a\\b&a&a\end{vmatrix}=(2a+b)\begin{vmatrix}1&a&b\\1&b&a\\1&a&a\end{vmatrix}$$

$$=(2a+b)\begin{vmatrix}1&a&b\\0&b-a&a-b\\0&0&a-b\end{vmatrix}=(2a+b)(b-a)(a-b)$$

$$\det B_1=\begin{vmatrix}1&a&b\\1&b&a\\1&a&a\end{vmatrix}=(b-a)(a-b)$$

$$\det B_2=\begin{vmatrix}a&1&b\\a&1&a\\b&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&b\\1&b&a\\1&a&a\end{vmatrix}=(b-a)(a-b)$$

$$\det B_3=\begin{vmatrix}a&a&1\\a&b&1\\b&a&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&a&a\\1&b&a\\1&a&b\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&a&a\\0&b-a&0\\0&0&b-a\end{vmatrix}=-(b-a)(b-a)$$

$$\therefore x_2=\frac{1}{2a+b}$$

（3）解：

$$\det A=\begin{vmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&3&0&1\\0&-7&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&5&-3&5\\0&-7&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&2&0\\0&0&0&8\end{vmatrix}=16$$

$$\det B_1=\begin{vmatrix}4&-2&3&-4\\-3&1&-1&1\\1&3&0&1\\-3&-7&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-2&3&-4\\-2&1&-1&1\\2&3&0&1\\-2&-7&3&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-2&3&-4\\8&-4&0\\-4&3&2\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}-10&9&0\\8&-4&0\\-4&3&2\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}-10&9\\8&-4\end{vmatrix}=4\left(40-72\right)=4\times\left(-32\right)=-128$$

$$\det B_2\begin{vmatrix}1&4&3&-4\\0&-3&-1&1\\1&1&0&1\\0&-3&3&1\end{vmatrix}=48 \qquad \det B_3=\begin{vmatrix}1&-2&4&-4\\0&1&-3&1\\1&3&1&1\\0&-7&-3&1\end{vmatrix}=96$$

$$\det B_4=\begin{vmatrix}1&-2&3&4\\0&1&-1&-3\\1&3&0&1\\0&-7&3&-3\end{vmatrix}=0x_1=-8,$$

$\therefore x_1=-8, x_2=3, x_3=6, x_4=0.$

2、

(1)解:齐次线性方程组仅有 0 解，当且仅当系数行列式为 0。

即 :

$$\begin{vmatrix}3&2&-1\\k&7&-2\\2&-1&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&2&3\\-2&7&k\\3&-1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&2&3\\0&3&k-6\\0&5&11\end{vmatrix}=+\begin{vmatrix}-1&2&3\\0&5&11\\0&0&k-\dfrac{36}{5}\end{vmatrix}\neq 0$$

$$\therefore k\neq\frac{36}{5}$$

(2)解:

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k-2 & 2 & 0 \\ 3 & k-1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (k-2)(k-1)-6 = k^2-3k-4 = (k-4)(k+1) \neq 0$$

$\therefore k \neq 4$且$k \neq -1$

3

(1)解:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore x_1 = -\frac{10}{7}, x_2 = \frac{1}{7}, x_3 = \frac{2}{7}.$

(2)解:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\therefore$无解

(3)解:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 2 \\ x_2 = -2x_3 + 3 \end{cases}$$

∴解为:

$$\begin{cases} x_1 = -2 + c \\ x_2 = 3 - 2c \\ x_3 = c \end{cases}$$

4 解:齐次线性方程组有非 0 解的充要条件是系数行列式为 0.

即:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 7 \\ -1 & 2 & k \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & k \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & k+6 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k+3 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore k = -3$

此时

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

∴解为 $\begin{cases} x_1 = -c \\ x_2 = c \\ x_3 = c \end{cases}$

5 解:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & k & 8 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & k-4 & 8-2k & 1 \end{pmatrix}$$

当 $k = 4$ 时, $r(A) = 1 < r(\overline{A})$, 无解.

当$k\neq 4$时,$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & k+4 & 1-\dfrac{2}{k-4}\\ 0 & 1 & -2 & \dfrac{1}{k-4}\end{pmatrix}$

得:$\begin{cases}x_1=\dfrac{k-b}{k-4}-(k+4)x_3\\ x_2=\dfrac{1}{k-4}+2x_3\end{cases}$

$\therefore$解为:$\begin{cases}x_1=\dfrac{k-6}{k-4}-(k+4)c\\ x_2=\dfrac{1}{k-4}+2c\\ x_3=c\end{cases}$

6 解:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & a & 3\\ 1 & a & 3 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & a+2 & 1\\ 1 & a-1 & 4 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & a+2 & 1\\ 0 & 0 & -(a+3)(a-2) & 2-a\end{pmatrix}$$

当$a=-3$时,$r(A)=2<r(\overline{A})=3$, 无解

当$a\neq -3$且$a\neq 2$时,有唯一解.

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & \dfrac{a+4}{a+3}\\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{a+3}\\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{a+3}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{a+3}\\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{a+3}\end{pmatrix}$$

$\therefore$解为:$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \dfrac{1}{a+3} \\ x_3 = \dfrac{1}{a+3} \end{cases}$

当 $a=2$ 时,有无穷解:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$解为 $\begin{cases} x_1 = 5c \\ x_2 = -4c+1 \\ x_3 = c \end{cases}$

7 解:设 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$, 则判断 β 是否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示转为方程组是否有解.

(1) $$(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -9 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\therefore \beta$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

$$\beta = 4\alpha_3 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2$$

(2)

$$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta\right)=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1\\2&1&-2&1\\1&1&1&3\\1&2&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-3&-1\\0&-1&4&3\\0&0&4&4\\0&0&0&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-3&-1\\0&1&-4&-3\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$\therefore\beta$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

(3)

$$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta\right)=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\1&-1&1&0\\1&-2&2&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&-2&2&-1\\0&-3&3&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&-1&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\beta=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2+0\alpha_3$$

8 解 : 设

$\beta=k_3\alpha_3+k_2\alpha_2+k_1\alpha_1$

$$\left(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta\right)=\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&0\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1+\lambda&1&1&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&0\\0&\lambda&-\lambda&\lambda\\0&-\lambda&-\lambda(\lambda+2)&\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&0\\0&\lambda&-\lambda&\lambda\\0&0&-\lambda(\lambda+3)&\lambda(\lambda+1)\end{pmatrix}$$

当$\lambda=-3$时,β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示

当$\lambda=0$时,$\left(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta\right)\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示且表示法唯一.

$\lambda \neq -3$ 且 $\lambda \neq 0$ 时, β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示且表示法唯一.

9

(1) 因为不成比例,所以线性无关.

(2) 解:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&-1&1\\-1&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3\\0&-2&-2\\0&3&3\\0&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3\\0&-2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2<3$

∴线性相关.

(3) 解:

$$(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&1&1\\-2&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&4\\0&7&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&4\\0&0&23\end{pmatrix}$$

$\therefore r(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2)=3$

∴线性无关.

10 解:

$$(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)=\begin{pmatrix}1&2&a\\-1&a&2\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&a\\0&a+2&a+2\\0&-2&1-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&a\\0&-2&1-a\\0&0&\dfrac{-(a-3)(a+2)}{2}\end{pmatrix}$$

∴当 $a=3$ 或 $a=-2$ 时, $r(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)=2<3$

向量组线性相关.

11 解:

(1) 设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$ 即:

$$k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)+k_3(\alpha_3-\alpha_1)=0$$

$$(k_1-k_3)\alpha_1+(-k_1+k_2)\alpha_2+(-k_2+k_3)\alpha_3$$

$\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$$\therefore\begin{cases}k_1-k_3=0\\-k_1+k_2=0\\-k_2+k_3=0\end{cases}$$

系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore$有非零解.

即存在不全为 0 的 k_1,k_2,k_3 使 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$ 成立.

$\therefore$ β_1,β_2,β_3 线性无关.

几何解释:设想 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为三棱锥的共点的三条棱,则 β_1,β_2,β_3 是三棱锥底面上的三条棱.

(2) 解 : 设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$, 即

$$\frac{1}{2}\left[k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)\right]=0$$

即 $(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$

$\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$$\therefore\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}\qquad 系数矩阵 A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$r(A)=3$

$\therefore$仅有 0 解.

$\therefore k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0 \Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$

$\therefore \beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关.

几何解释: 见 $P85$

(3) 解: 设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$, 即

$$\frac{1}{2}\left[k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_3-\alpha_1)+k_3(\alpha_2+\alpha_3)\right]=0$$

即 $(k_1-k_2)\alpha_1+(k_1+k_3)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$

$\because \quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$$\therefore \begin{cases} k_1-k_2=0 \\ k_1+k_3=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases} \qquad \text{系数矩阵 } A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A)=2<3$

$\therefore$ 有非 0 解.

即存在不全为 0 的数 k_1,k_2,k_3 使 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

$\therefore \beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性相关.

几何解释: 设想 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为平行六面体共点的三条棱, 则 β_1,β_2,β_3 为相应共点三个面的对角线, 且三对角线共面.

12

(1) 证: $(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)$

$$\xrightarrow[\text{第}2\text{列}-\text{第}1\text{列}]{\substack{\text{第}s\text{列}-\text{第}s-1\text{列} \\ \text{第}s-1\text{列}-\text{第}s-2\text{列} \\ \cdots\cdots}} (\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s)$$

$\because$ 初等变换不改变矩阵的秩. $\therefore r\left(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s\right)=s$

$\therefore \alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$ 线性无关.

(2) 证:

$$\left(-\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_s,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s-1}-\alpha_s\right)$$
$$=\left(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s\right)\begin{pmatrix}-1&1&\cdots&1\\1&-1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&-1\end{pmatrix}$$

而

$$|A|=\begin{vmatrix}-1&1&\cdots&1\\1&-1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&-1\end{vmatrix}=(s-2)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&-1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&-1\end{vmatrix}=(s-2)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&-2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&-2\end{vmatrix}$$
$$=(s-2)(-2)^{s-1}\neq 0$$

$\therefore A$ 可逆.

而一矩阵乘可逆矩阵, 其秩不变.

$\therefore -\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_s,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s-1}-\alpha_s$

线性无关.

13

(1) 等价.

(2) 不等价, $r\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=2\neq r\left(\beta_1,\beta_2\right)=1$

14

证: 已知 β_1,β_2,β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,只要证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 也可由

β_1,β_2,β_3 线性表示即可:

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$$

即只要证 A 可逆

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=4\neq 0$$

$\therefore A$ 可逆.

$\therefore \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}\cong\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$

15

证:只需证 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性表示即可.

$$\because r(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)=r\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}=n$$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性无关.

又 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是 n 维向量, 而 $\forall n+1$ 个 n 维向量线性相关.

$\therefore \varepsilon_i$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性表示$(i=1,2\cdots n)$.

16

证: $l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_{r-1}\beta_{r-1}=0$

即: $l_1(\alpha_1+k_1\alpha_r)+l_2(\alpha_2+k_2\alpha_r)+\cdots+l_{r-1}(\alpha_{r-1}+k_{r-1}\alpha_r)=0$

即: $l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_{r-1}\alpha_{r-1}+(l_1k_1+l_2k_2+\cdots+l_{r-1}k_{r-1})\alpha_r=0$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 线性无关.

$\therefore l_1=\cdots=l_{r-1}=0$

$\therefore \beta_1, \cdots \beta_{r-1}$ 线性无关.

17

证: $\because \alpha_1 \neq 0, \therefore \alpha_1$ 线性无关

由 α_2 不能由 α_1 线性表示,

$\therefore \alpha_1, \alpha_2$ 线性无关.

由 α_3 不能由 α_1, α_2 线性表示

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

……

由 α_s 不能由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{s-1}$ 线性表示

$\therefore \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s$ 线性无关.

18

证: 要证两向量组能相互线性表示, 只需证 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s$ 线性表示 (已知), 且

α_s 可由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{s-1}, \beta$ 线性表示

$\because \beta$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{s-1}, \alpha_s$ 线性表示

故 $\exists k_1, \cdots k_s$, 使 $\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{s-1}\alpha_{s-1} + k_s\alpha_s$

其中必有 $k_s \neq 0$, 否则 $\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{s-1}\alpha_{s-1}$, 即 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{s-1}$ 线性表示矛盾.

于是 $\alpha_s = -\frac{k_1}{k_s}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_{s-1}}{k_s}\alpha_{s-1} + \frac{1}{k_s}\beta$

即 α_s 可由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{s-1}, \beta$ 线性表示.

19

证:必要性:若$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$线性无关. $\forall n$维向量β

有$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n,\beta$线性相关. $\therefore\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$线性表示.

充分性:$\because\forall n$维向量可由$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$线性表示.

$\therefore\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$可由$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$线性表示.

又$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$必可由$\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$线性表示

$\therefore r\left(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n\right)=r\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n\right)=n$

$\therefore\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$线性无关.

20

证:设$\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_r}$是$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s$中任取的$r$个线性无关的向量.

要证其为极大无关组,只需证$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s$中任一向量可由其线性表示.

$\forall\alpha_i,\left(i=1\cdots s\right)$. 若$\alpha_i$是$\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_r}$中的一个,则显然$\alpha_i$可由$\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_s}$线性表示.

若α_i不是$\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_r}$中的一个,则$\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_r},\alpha_i$是

$r+1$个向量,而$r\left(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s\right)=r$

$\therefore\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_r},\alpha_i$线性相关

又$\because\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_r}$线性无关

$\therefore\alpha_i$可由$\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_r}$线性表示.

故$\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_r}$是极大无关组.

21

证：(1) 设 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s$ 秩为 p，极大无关组为 $\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_p}$.

$\beta_1,\cdots\beta_t$ 的秩为 q，极大无关组为 $\beta_{j_1},\cdots\beta_{j_q}$.

于是 $\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_p}$ 可由 $\beta_{j_1},\cdots\beta_{j_q}$ 线性表示.

又 $\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_p}$ 线性无关，$\therefore p\le q$

即 $r(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s)\le r(\beta_1,\cdots\beta_t)$.

(2) $\because\{\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s,\beta_1,\cdots\beta_t\}\cong\{\beta_1,\cdots\beta_t\}$

故 $r(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s,\beta_1,\cdots\beta_t)=r(\beta_1,\cdots\beta_t)$

22

证:记 $A=(\alpha_1,\cdots\alpha_n)$ $\qquad B=(\beta_1,\cdots\beta_n)$

于是 $A+B=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$

设 $\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 的秩为 s,极大无关组为 $\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_s}$

$\beta_1,\cdots\beta_n$ 的秩为 t,极大无关组为 $\beta_{j_1},\cdots\beta_{j_t}$

则 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n$ 可由 $\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_s}$ $\beta_{j_1},\cdots\beta_{j_t}$ 线性表示.

$\therefore r(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)\le r(\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_s}\beta_{j_1},\cdots\beta_{j_t})\le s+t$

即 $r(A+B)\le r(A)+r(B)$

23

证:记 $A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s)$ $\qquad AB=(\gamma_1,\cdots\gamma_n)$

于是$(\gamma_1,\cdots\gamma_n)=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{11} & \cdots & b_{11} \\ b_{11} & b_{11} & \cdots & b_{11} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{11} & b_{11} & \cdots & b_{11} \end{pmatrix}$

$\gamma_i=b_{1i}\alpha_1+b_{2i}\alpha_2+\cdots+b_{si}\alpha_s \qquad i=1,2,\cdots,n$

即$\gamma_1,\cdots\gamma_n$可由$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s$线性表示.-

$\therefore r(\gamma_1,\cdots\gamma_n)\le r(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s)$

即$r(AB)\le r(A)$

记$B=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix} \qquad AB=\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix}$

则$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix}$

$\gamma_i=a_{i1}\beta_1+\cdots+a_{is}\beta_s$

即$\gamma_1,\cdots\gamma_m$可由$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s$线性表示

$\therefore r(\gamma_1,\cdots\gamma_m)\le r(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s)$

$\therefore r(AB)\le r(B)$.

$\therefore r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$.

24

证:$\because$向量组 I 可由向量组III线性表示, $\therefore r_1\le r_3$

$\because$向量组 II 可由向量组III线性表示, $\therefore r_2\le r_3$

$\therefore \max(r_1, r_2) \le r_3$

设向量组III可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{r_1}, \beta_{1,} \cdots \beta_{r_2}$ 线性表示.

于是 $r_3 \le r(\alpha_1, \cdots, \alpha_{r_1}, \beta_{1,} \cdots \beta_{r_2}) \le r_1 + r_2$

25

证:记 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s$ 的极大无关组为 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$

$\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_t$ 的极大无关组为 $\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r}$

则 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 可由 $\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r}$ 线性表示

记 $A = (\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r})_{n\times r}$ $\qquad B = (\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r})_{n\times r}$

于是存在 r 阶方阵 C ,使

$$A = BC$$

$$r = r(A) = r(BC) \le \min\{r(B), r(C)\} = \min\{r, r(C)\}$$

$$\therefore r(C) = r$$

即: C 可逆.

$\therefore B = AC^{-1}$,

即 $\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r}$ 可由 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表示,

$\therefore \beta_1, \beta_2 \cdots \beta_t$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s$ 线性表示

26. 证明：将矩阵 B按列分为s块： $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$, 则由分块矩阵的乘法：

$$AB = 0 \Leftrightarrow A(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) = 0 \Leftrightarrow (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_s) = (0, 0, \cdots, 0) \Leftrightarrow A\beta_i = 0$$

（其中 $i=1,2,\cdots,s$）$\Leftrightarrow$ 矩阵 B 的每一个列向量都是齐次线性方程组

$AX=0$ 的解.

27. 证明：

因 $r(A)=r<n$, 从而齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系含有 $n-r$ 个

向

量

不妨设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$ 是其一个基础解系，令 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r})$, 则 B 是

秩为

$n-r$ 的 $n\times(n-r)$ 矩阵，且 $AB=0$.

28. 证明：充分性：若 $\det A=0$, 则齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解，不

妨设 α 是其中

一个非零解，令 $B=(\alpha,0,\cdots,0)$, 则 $B\neq 0, AB=0$.

必要性：若存在 $B\neq 0, AB=0$, 则可知 B 的每一个列向量均为齐

次线性方程组

$AX=0$ 的解，因 $B\neq 0$, 从而有非零列向量 β_i，使得 $A\beta_i=0$，即齐

次线性方程组

$AX=0$ 有非零解，从而 $\det A=0$.

29. 证明：（1）

由 $AB=0$, 则 $r(A)+r(B)\leq n$, 又 $r(A)=n$, 从而 $r(B)=0$, 从而 $B=0$.

（2）由 $AB=A$, 可得 $A(B-E)=0$, 由（1）可知 $B-E=0$, 即 $B=E$.

30. 解：（1）对 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 作初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\-2&2&10\\5&-1&-17\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&3\\0&8&16\\0&-16&-32\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由上可得，α_1,α_2 是其一个极大无关组，且 $\alpha_3=-3\alpha_1+2\alpha_2$.

（2）对 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 作初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\-1&1&-1&0\\0&5&-2&7\\4&6&0&14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&3&0&3\\0&5&-2&7\\0&-2&-4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&0&1\\0&0&-2&2\\0&0&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，由上可得，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为其一个极大无关组，且

$\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$.

（3）对 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 作初等行变换：

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&6&9\\-5&1&7\\1&4&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&11&22\\0&2&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为其一个极大无关组.

31.解：对 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 作初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2.$$

32. 解：（1）

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0\\1&-1&2&-1&0\\3&1&0&1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0\\0&-2&3&-2&0\\0&-2&3&-2&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0\\0&-2&3&-2&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&-\frac{3}{2}&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},得到一般解\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3\\x_2=\frac{3}{2}x_3-x_4\end{cases},其中x_3,x_4为自由未知量.$$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}$ 分别取 $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得到原方程组的一个基础解系：

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

则方程组的全部解可以表为 $\eta=c_1\eta_1+c_2\eta_2$，（c_1,c_2 为任意常数）

（2）

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-1&-1&0\\2&-4&5&3&0\\4&-8&17&11&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&-1&-1&0\\0&0&7&5&0\\0&0&7&5&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&-1&-1&0\\0&0&1&\frac{5}{7}&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -\frac{2}{7} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$，得到一般解 $\begin{cases}x_1=2x_2+\frac{2}{7}x_4\\ x_3=-\frac{5}{7}x_4\end{cases}$，其中 x_2,x_4 为自由未知量.

令 x_2,x_4 分别取 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得到原方程组的一个基础解系：

$$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\0\\-\frac{5}{7}\\1\end{pmatrix}$$

则方程组的全部解可以表为 $\eta=c_1\eta_1+c_2\eta_2$,（c_1,c_2 为任意常数）

（3）$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 0\\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 0\\ 0 & 6 & -6 & -6 & 10 & 0\\ 0 & 9 & -9 & -9 & 15 & 0\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{5}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{5}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0\end{pmatrix}$$

得到一般解 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{3}x_5\\ x_2=x_3+x_4-\frac{5}{3}x_5\end{cases}$，其中 x_3,x_4,x_5 为自由未知量，令 x_3,x_4,x_5

分别取 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，得到原方程组的一个基础解系：

$$\eta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{5}{3}\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

则方程组的全部解可以表为 $\eta=c_1\eta_1+c_2\eta_2+c_3\eta_3$，（$c_1,c_2,c_3$ 为任意常数）

33. 证明：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\-1&0&0&0&1&a_5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\0&0&0&0&0&a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\end{pmatrix}$$

方程组有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{5}a_i=0$

有解时

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1&a_1+a_2+a_3+a_4\\0&1&0&0&-1&a_2+a_3+a_4\\0&0&1&0&-1&a_3+a_4\\0&0&0&1&-1&a_4\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得到一般解$\begin{cases} x_1 = x_5 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ x_2 = x_5 + a_2 + a_3 + a_4 \\ x_3 = x_5 + a_3 + a_4 \\ x_4 = x_5 + a_4 \end{cases}$，其中 x_5 为自由未知量

令 $x_5 = c$ (c 为任意常数)，得方程组的全部解$\begin{cases} x_1 = c + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ x_2 = c + a_2 + a_3 + a_4 \\ x_3 = c + a_3 + a_4 \\ x_4 = c + a_4 \\ x_5 = c \end{cases}$，

(c 为任意常数)

34.解：（1）$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -8 & -1 & -2 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \to$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{5} \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{32}{5} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{5} \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

得到 $r(A) = 3 \neq r(\overline{A}) = 4$, 故该方程组无解.

（2）

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&3\\0&1&-2&0&-8\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\ \because r(A)=r\left(\overline{A}\right)=3<4,\therefore \text{方程组有无穷多解.}$$

原方程组与$\begin{cases}x_1=-x_3+3\\x_2=2x_3-8\\x_4=6\end{cases}$同解，其中 x_3 为自由未知量，令 $x_3=0$，得特解

$$\gamma_0=\begin{pmatrix}3\\-8\\0\\6\end{pmatrix},$$

又导出组的一般解为$\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=2x_3\\x_4=0\end{cases}$，令 $x_3=1$，得导出组的一个基础解系

$$\eta=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix},$$

从而原方程组的全部解为 $\gamma=\gamma_0+c\eta$，（c 为任意常数）

（3）$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&-1\\3&2&1&1&-3&-5\\0&1&2&2&6&2\\5&4&3&3&-1&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&-1\\0&-1&-2&-2&-6&-2\\0&1&2&2&6&2\\0&-1&-2&-2&-6&-2\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&-1\\0&1&2&2&6&2\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5&-3\\0&1&2&2&6&2\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\because r(A)=r\left(\overline{A}\right)=2<5,\therefore$ 方程组有无穷多解.

原方程组与$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 - 3 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 2 \end{cases}$同解，其中其中$x_3, x_4, x_5$为自由未知量

令$x_3 = x_4 = x_5 = 0$，得方程组的一个特解$\gamma_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

又导出组的一般解为$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases}$，令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$分别取

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

得导出组的一个基础解系$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

则方程组的全部解可以表为$\gamma = \gamma_0 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3$,（$c_1, c_2, c_3$为任意常数）

（4）

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & -7 & -12 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -25 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&5\\0&1&-2&0&-7\\0&0&1&0&5\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0&5\\0&1&-2&0&-7\\0&0&1&0&5\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&-3\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&5\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$\because r(A)=r(\overline{A})=4,\therefore$ 方程组有唯一解，$\gamma=\begin{pmatrix}-3\\3\\5\\0\end{pmatrix}$

35.证明：$\because r(A)=n-1,\therefore |A|=0,$ 又$AA^*=|A|E,\therefore AA^*=0$

$\therefore A^*$ 的每一个列向量 $\begin{pmatrix}A_{i1}\\A_{i2}\\\cdots\\A_{in}\end{pmatrix}(i=1,2,\cdots,n)$ 均为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解.

又$\because r(A)=n-1,\therefore A$ 中有 $n-1$ 阶子式不等于 0，即存在元素 a_{ij}，其代数余子式 $A_{ij}\neq 0$

又$\because r(A)=n-1,\therefore$ 齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系含有一个解向量

$\therefore\begin{pmatrix}A_{i1}\\A_{i2}\\\cdots\\A_{in}\end{pmatrix}$ 是 $AX=0$ 的一个基础解系，从而方程组的全部解为

$\eta=c\begin{pmatrix}A_{i1}\\A_{i2}\\\cdots\\A_{in}\end{pmatrix}$（$c$ 为任意常数）

36.解：设 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$，即 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$，

解之得，$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$，故 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

37.解：（1）$\alpha^T\beta = (-1)\times 4 + 0\times(-2) + 3\times 0 + 5\times(-1) = -9$，故不正交

（2）$\alpha^T\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\dfrac{1}{3}\right)\times(-2) + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{3} + (-1)\times\dfrac{2}{3} = 0$，正交

38.解：（1）$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha^T\alpha} = \sqrt{4} = 2$，故 $\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|} = \dfrac{1}{2}(1,-1,-1,1)^T$

（2）$\|\beta\| = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$，故 $\dfrac{\beta}{\|\beta\|} = \dfrac{2}{\sqrt{21}}\left(\dfrac{1}{2},-2,0,1\right)^T$

39.证明：对任意实数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，令 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$

因 $\beta^T\alpha_i = 0, i = 1, 2, \cdots, s$，则

$\beta^T\alpha = \beta^T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s) = k_1\beta^T\alpha_1 + k_2\beta^T\alpha_2 + \cdots + k_s\beta^T\alpha_s = 0$，得证.

40.证明：设 $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$，因 α 与 R^n 中的任意向量都正交，则

令 ε_i 表示第 i 分量为 1，其余分量为 0 的 n 维向量，$i = 1, 2, \cdots, n$

则 $\alpha^T\varepsilon_i = a_i = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$，从而可得，$\alpha$ 是零向量.

41.提示：只需证明两两正交，且均为单位向量即可.

42. 解：（1）令 $\beta_1=\alpha_1=(0,1,1)^T$，

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\alpha_2^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1=(1,1,0)^T-\frac{1}{2}(0,1,1)^T=\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^T$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\alpha_3^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1-\frac{\alpha_3^T\beta_2}{\beta_2^T\beta_2}\beta_2=(1,0,1)^T-\frac{1}{2}(0,1,1)^T-\frac{1}{3}\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^T=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^T$$

再将 β_1,β_2,β_3 单位化得，

$$\gamma_1=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T,\gamma_2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^T,\gamma_3=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T$$

（2）$\beta_1=\alpha_1=(1,-2,2)^T$，

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\alpha_2^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1=(-1,0,-1)^T+\frac{1}{3}(1,-2,2)^T=\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)^T$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\alpha_3^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1-\frac{\alpha_3^T\beta_2}{\beta_2^T\beta_2}\beta_2=(5,-3,-7)^T+\frac{1}{3}(1,-2,2)^T-\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)^T=(6,-3,-6)^T$$

再将 β_1,β_2,β_3 单位化得，

$$\gamma_1=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^T,\gamma_2=\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)^T,\gamma_3=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)^T$$

（3）令 $\beta_1=\alpha_1=(1,1,1,1)^T$，

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\alpha_2^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1=(3,3,-1,-1)^T-(1,1,1,1)^T=(2,2,-2,-2)^T$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\alpha_3^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1-\frac{\alpha_3^T\beta_2}{\beta_2^T\beta_2}\beta_2=(-2,0,6,8)^T-3(1,1,1,1)^T+2(2,2,-2,-2)^T=(-1,1,-1,1)^T$$

再将 β_1,β_2,β_3 单位化得，

$\gamma_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T,\gamma_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^T,\gamma_3=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T$

43.证明：因 $AA^T=E$，故 $\left|AA^T\right|=|A|\left|A^T\right|=|A|^2=|E|=1$，从而 $|A|=1$ 或 -1.

44.证明：因 A 是正交矩阵，故 $AA^T=A^TA=E$，

又 $A^{-1}\left(A^{-1}\right)^T=A^{-1}\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^TA\right)^{-1}=E^{-1}=E$，

因 $A^*=|A|A^{-1}$，故 $A^*\left(A^*\right)^T=|A|A^{-1}|A|\left(A^{-1}\right)^T=\left(|A|\right)^2A^{-1}\left(A^{-1}\right)^T$，

又 $|A|=1$ 或 -1，故 $\left(|A|\right)^2=1$，从而 $A^*\left(A^*\right)^T=E$

由上可得，A^{-1},A^* 都是正交矩阵.

45.证明：因 $A^T=A,B^T=B^{-1}$，故 $\left(B^{-1}AB\right)^T=B^TA^T\left(B^{-1}\right)^T=B^{-1}AB$，

从而 $B^{-1}AB$ 为实对称矩阵.

46. 证 明 ： 因 $AA^T=E,BB^T=E$ ， 故

$AB\left(AB\right)^T=ABB^TA^T=AEA^T=AA^T=E$

从而 AB 是正交矩阵.

47.证明：设 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 是 n 阶上三角形的正交矩阵，当 $n=1$ 时结论显然成立.

假设当阶为 $n-1$ 时，结论成立.

则当阶为 n 时，因 A 是正交矩阵，故 A 的行（列）向量组是单位向量组，考虑第 n 行

可得 $a_{nn}^2=1$，考虑第 n 列，可得，$a_{1n}^2+a_{2n}^2+\cdots+a_{nn}^2=1$

从而可知，$a_{1n}=a_{2n}=\cdots=a_{n-1n}=0$，

将 A 分块为 $A=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$，其中 B 为 $n-1$阶方阵，则

$$AA^T=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^T & 0 \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} BB^T & 0 \\ 0 & a_{nn}^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

从而可知 B 为 $n-1$阶上三角形的正交矩阵，由归纳假设可得，B 为对角矩阵，且主对角线上的元素为 1 或－1，由上可知，当阶为 n 时，结论成立.

得证.

48.证明：因 A 是正交矩阵，故 $AA^T=A^TA=E$

$\|A\alpha\|=\sqrt{(A\alpha)^T A\alpha}=\sqrt{\alpha^T A^T A\alpha}=\sqrt{\alpha^T E\alpha}=\sqrt{\alpha^T\alpha}=\|\alpha\|$，得证.

49.证明：由 48 题知，$\|A\alpha_i\|=1$，$i=1,2,\cdots,n$

又任意 $i\neq j, \alpha_i(\alpha_j)^T=0$，故 $(A\alpha_i)(A\alpha_j)^T=A\alpha_i(\alpha_j)^T A^T=0$

从而 $A\alpha_1, A\alpha_2,\cdots, A\alpha_n$ 是一组标准正交基.