习题一（A）

1. $A+B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}$， $A-B=\begin{pmatrix}3&-1&-3\\5&0&-7\end{pmatrix}$，

$$2A-3B=\begin{pmatrix}4&0&-2\\6&2&-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3&3&6\\-6&3&15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-3&-8\\12&-1&-19\end{pmatrix}.$$

2. 由 $X-2A=B-X$ 得

$$X=\frac{1}{2}(2A+B)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}4&-2\\-2&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-2\\-2&0\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-4\\-4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}.$$

3. （1） $A=\begin{pmatrix}58&27&15&4\\72&30&18&5\\65&25&14&3\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}63&25&13&5\\90&30&20&7\\80&28&18&5\end{pmatrix}$.

（2） $A+B=\begin{pmatrix}121&52&28&9\\162&60&38&12\\145&53&32&8\end{pmatrix}$，为 1997 年和 1998 年各种油品的产量之和.

$B-A=\begin{pmatrix}5&-2&-2&1\\18&0&2&2\\15&3&4&2\end{pmatrix}$，为 1998 年和 1997 年各种油品的产量之差.

（3） $\frac{1}{2}(A+B)=\begin{pmatrix}60.5&26&14&4.5\\81&30&19&6\\72.5&26.5&16&4\end{pmatrix}$，为 1997 年和 1998 年各种油品的平均产量.

4. （1） $\begin{pmatrix}4&6\\7&-1\end{pmatrix}$；（2） $\begin{pmatrix}0&5\\0&0\end{pmatrix}$；（3） $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$；（4） $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$；（5）14；（6） $\begin{pmatrix}30&7\\-18&45\\23&-2\end{pmatrix}$；

（7）15.

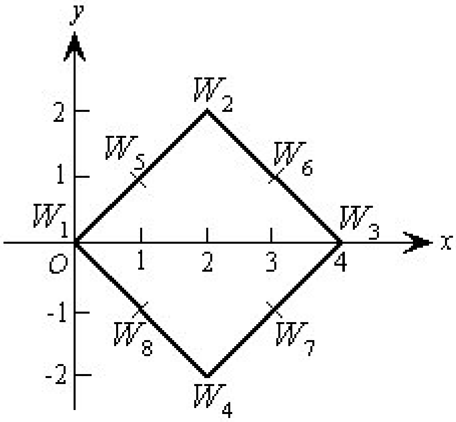
5. （1） $W_1=AV_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$， $W_2=AV_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$，

$W_3=AV_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\.0\end{pmatrix}$， $W_4=AV_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$，

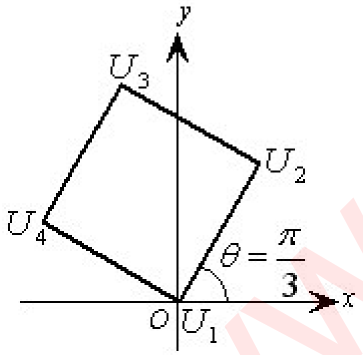
$W_5=AV_5=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$， $W_6=AV_6=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$，

$W_7 = AV_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$，$W_8 = AV_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

由$W_1,\cdots,W_8$构成的图形如下：

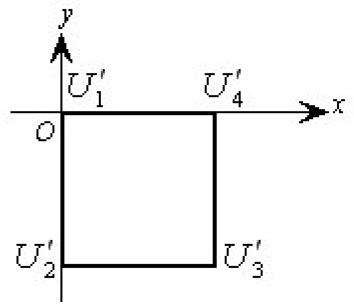


（2）当$\theta = \dfrac{\pi}{3}$时，$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$. 仿（1）得由$U_1,\cdots,U_8$构成的图形如下：



（由正方形$V_1V_2V_3V_4$逆时针旋转$\dfrac{\pi}{3}$弧度得到）

当$\theta = -\dfrac{\pi}{2}$时，$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 仿（1）得由$U_1',\cdots,U_8'$构成的图形如下：



（由正方形 $V_1V_2V_3V_4$ 顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 弧度得到）

6. $A=\begin{pmatrix}2000 & 1000 & 800\\ 1200 & 1300 & 500\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0.2 & 0.35\\ 0.011 & 0.05\\ 0.12 & 0.5\end{pmatrix}$.

（1）

$$BA=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{北美} & \text{欧洲} & \text{非洲}\end{array}\\ \begin{pmatrix}820 & 655 & 335\\ 82 & 76 & 33.8\\ 840 & 770 & 346\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{价值}\\ \text{重量}\\ \text{体积}\end{array}$$

（2）$C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$$BC=\begin{pmatrix}1810\\ 191.8\\ 1956\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{总价值}\\ \text{总重量}\\ \text{总体积}\end{array}$$

7. （1）正确. $\because (A+B)^T=A^T+B^T=A+B$.

（2）正确. $\because (kA)^T=kA^T=kA$.

（3）未必正确. $\because (AB)^T=B^TA^T=BA\neq AB$.

8. （1）设与 A 可交换的矩阵为 $B=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$，则由 $AB=BA$ 得 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

即 $\begin{pmatrix}a & c\\ a+b & c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & c\\ b+d & d\end{pmatrix}$.

于是，$\begin{cases}a+b=b+d\\ c+d=d\end{cases}$. 解之得 $\begin{cases}d=a\\ c=0\end{cases}$. 故与 A 可交换的所有矩阵为 $\begin{pmatrix}a & 0\\ b & a\end{pmatrix}$，其中 a,b 为任意常

数.

（2）设与 A 可交换的矩阵为 $B=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$，则由 $AB=BA$ 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1+x_4 & x_2+x_5 & x_3+x_6 \\ x_4+x_7 & x_5+x_8 & x_6+x_9 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_1+x_2 & x_2+x_3 \\ x_4 & x_4+x_5 & x_5+x_6 \\ x_7 & x_7+x_8 & x_8+x_9 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{cases} x_4=x_7=x_8=0 \\ x_5=x_9=x_1 \\ x_2=x_6 \end{cases}$$

故与 A 可交换的所有矩阵为 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix}$，其中 x_1,x_2,x_3 为任意常数.

注：待定系数法是解决此类问题的有效方法之一.

9. 证 （1）$\because A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2=B_1A+B_2A=(B_1+B_2)A$，$\therefore A$ 与 B_1+B_2 可交换.

（2）$\because A(B_1B_2)=(AB_1)B_2=(B_1A)B_2=B_1(AB_2)=B_1(B_2A)=(B_1B_2)A$，$\therefore A$ 与 B_1B_2 可交换.

（3）$(A+B_1)(A-B_1)=A^2\underline{-AB_1+B_1A}-B_1^2=A^2+O-B_1^2=A^2-B_1^2$.

10. （1）$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

（2）令 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A^3=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

猜测有如下结论：

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

下面用数学归纳法证明：当 $n=1$ 时，结论显然成立；假设当 $n=k$ 时结论成立，则当 $n=k+1$

时，$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}1&3n\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3(n+1)\\0&1\end{pmatrix}$，结论成立.

综上知，$A^n=\begin{pmatrix}1&3n\\0&1\end{pmatrix}$.

注：先根据 A^n 的前若干项猜测其形式，再用数学归纳法加以证明是求矩阵的幂的常用方法之一.

（3）$\begin{pmatrix}a&&\\&b&\\&&c\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n&&\\&b^n&\\&&c^n\end{pmatrix}$

注：务必牢记这个重要的结果！

（4）（直接计算即可）令 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

$A^n=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}(n\geq 4)$.

（5）（直接计算即可）$\begin{pmatrix}1&3&6&10\\0&1&3&6\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

（6）令 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$，则由直接计算知，$A^2=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}=2^2E$，

$A^3=\begin{pmatrix}4&-4&-4&-4\\-4&4&-4&-4\\-4&-4&4&-4\\-4&-4&-4&4\end{pmatrix}=2^{3-1}A$，$A^4=\begin{pmatrix}16&0&0&0\\0&16&0&0\\0&0&16&0\\0&0&0&16\end{pmatrix}=2^4E$.

猜测有如下结论：

$$A^n=\begin{cases}2^n E, & n\text{为偶数}\\ 2^{n-1}A, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

下面可利用数学归纳法加以证明，此处从略.

11. A^2 **的第** k **行第** l **列的元素为**

$$(a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{kn})\begin{pmatrix}a_{1l}\\a_{2l}\\\vdots\\a_{nl}\end{pmatrix}=a_{k1}a_{1l}+a_{k2}a_{2l}+\cdots+a_{kn}a_{nl}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}a_{jl}\ .$$

AA^T **的第** k **行第** l **列的元素为**

$$(a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{kn})(a_{l1},a_{l2},\cdots,a_{ln})^T=a_{k1}a_{l1}+a_{k2}a_{l2}+\cdots+a_{kn}a_{ln}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}a_{lj}\ .$$

$A^T A$ **的第** k **行第** l **列的元素为**

$$\begin{pmatrix}a_{1k}\\a_{2k}\\\vdots\\a_{nk}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}a_{1l}\\a_{2l}\\\vdots\\a_{nl}\end{pmatrix}=a_{1k}a_{1l}+a_{2k}a_{2l}+\cdots+a_{nk}a_{nl}=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}a_{il}\ .$$

12.（1） $f(A)=A^2-5A+3E=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}^2-5\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$

（2） $f(A)=A^2-A+E=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&1&3\\8&2&3\\-2&1&0\end{pmatrix}.$

注： $f(A)$ **在矩阵论上称为矩阵多项式. 矩阵** A **与其矩阵多项式** $f(A)$ **之间关系密切，将在后续章节陆续介绍.**

13.（1） $A=\begin{pmatrix}0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix}3&1&3&1&2\\1&3&1&3&2\\3&1&3&1&2\\1&3&1&3&2\\2&2&2&2&4\end{pmatrix}.$

（2）$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&2&0&1&0\\1&0&2&0&1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}$.

注：邻接矩阵（adjacent matrix）的概念在运筹学（Operations Research）的一个重要分支—代数图论（Algebraic Graph Theory）上有着重要的应用.

14. $A^2=A\Leftrightarrow[\frac{1}{2}(B+I)]^2=\frac{1}{2}(B+I)\Leftrightarrow\frac{1}{4}(B^2+2BI+I^2)=\frac{1}{2}(B+I)$

$\Leftrightarrow(B^2+2B+I)=2(B+I)\Leftrightarrow B^2=I$.

15. （1）$tr(A+B)=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=tr(A)+tr(B)$.

（2）$tr(kA)=\sum_{i=1}^{n}(ka_{ii})=k\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=k\,tr(A)$.

（3）$tr(A^T)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=tr(A)$.

（4）$tr(AB)=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji})=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}b_{ji}a_{ij})=tr(BA)$.

注：矩阵的“迹”（trace）的概念，特别是矩阵的行列式，迹和特征值的关系：$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，

$tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$ **（见第四章）是历年考研的热门考点.**

16. （1）（直接计算）1.

（2）（按任一行或列展开）12.

（3）原 $\underset{\text{第2列减去第1列}}{=}\begin{vmatrix}34215&1000\\28092&1000\end{vmatrix}=1000\begin{vmatrix}34215&1\\28092&1\end{vmatrix}=1000\times6123=6123000$.

（4）原 $\overset{\text{第2行的(−98)倍加到第3行}}{=}\begin{vmatrix}5&-1&3\\2&2&2\\0&7&3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}5&-1&3\\1&1&1\\0&7&3\end{vmatrix}\overset{\text{按第1行展开}}{=}\cdots=8$.

（5）利用 P22 例 6 的结论. 原$=[5+(4-1)\times1](5-1)^3=512$.

(6)原 $\overset{\text{第2,3,4行都加到第1行}}{=}\begin{vmatrix}10&2&3&4\\10&3&4&1\\10&4&1&2\\10&1&2&3\end{vmatrix}\overset{\text{第2,3,4行都减去第1行}}{=}\begin{vmatrix}10&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&2&-2&-2\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}$

$\underset{\text{按第1列展开}}{=}10\begin{vmatrix}1&1&-3\\2&-2&-2\\-1&-1&-1\end{vmatrix}=\cdots=160.$

（7）利用 P24 例 8 Van der monde 行列式的结论.

原$=(2-1)\times(3-1)\times(4-1)\times(3-2)\times(4-2)\times(4-3)=12$.

注：务必牢记 Van der monde 行列式的重要结论！

（8）原 $\underset{\text{第2,3,4列的}(-1)\text{倍都加到第1列}}{=}\begin{vmatrix}-8&2&3&4\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}\underset{\text{按第1列展开}}{=}-8\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{vmatrix}=-8\times24=-192$.

问：如此行列式扩展到n**阶，结果又如何呢？**

17.（1）左$=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&x-1\\0&x-1&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&x-1\\x-1&5\end{vmatrix}=5-(x-1)^2$.

解$5-(x-1)^2=1$**得**$x=3$**或**-1.

（2）直接按第一行展开. 左$=-x^2-x+2=0$. **解**$5-(x-1)^2=1$**得**$x=1$**或**-2.

注：解行列式方程的问题可先计算相应的行列式，再解方程.

18.(1)原 $=4\begin{vmatrix}a_{11}&2a_{12}-3a_{11}&-a_{13}\\a_{21}&2a_{22}-3a_{21}&-a_{23}\\a_{31}&2a_{32}-3a_{31}&-a_{33}\end{vmatrix}\underset{\text{第1列的3倍加到第2列}}{=}4\begin{vmatrix}a_{11}&2a_{12}&-a_{13}\\a_{21}&2a_{22}&-a_{23}\\a_{31}&2a_{32}&-a_{33}\end{vmatrix}$

$=-8\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=-8.$

$$(2)原=4\begin{vmatrix}2a_{22}-3a_{21} & a_{21} & a_{23}\\ 2a_{12}-3a_{11} & a_{11} & a_{13}\\ 2a_{32}-3a_{31} & a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}\underset{第2列的3倍加到第1列}{=}4\begin{vmatrix}2a_{22} & a_{21} & a_{23}\\ 2a_{12} & a_{11} & a_{13}\\ 2a_{32} & a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=-8\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=8\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=8.$$

$$19.(1)原\underset{第2,3列加到第1列}{=}\begin{vmatrix}2x+2y & y & x+y\\ 2x+2y & x+y & x\\ 2x+2y & x & y\end{vmatrix}=(2x+2y)\begin{vmatrix}1 & y & x+y\\ 1 & x+y & x\\ 1 & x & y\end{vmatrix}$$

$$=(2x+2y)\begin{vmatrix}1 & y & x+y\\ 0 & x & -y\\ 0 & x-y & -x\end{vmatrix}=(2x+2y)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & x & -y\\ 0 & x-y & -x\end{vmatrix}=(2x+2y)\begin{vmatrix}x & -y\\ x-y & -x\end{vmatrix}$$

$$=-2(x^3+y^3).$$

$$(2)原\underset{第2,3,4列都减去第1列}{=}\begin{vmatrix}a^2 & 1-2a & 4-4a & 9-6a\\ b^2 & 1-2b & 4-4b & 9-6b\\ c^2 & 1-2c & 4-4c & 9-6c\\ d^2 & 1-2d & 4-4d & 9-6d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a^2 & 1-2a & 2 & 6\\ b^2 & 1-2b & 2 & 6\\ c^2 & 1-2c & 2 & 6\\ d^2 & 1-2d & 2 & 6\end{vmatrix}=0.$$

$$(3)原\underset{交换2,4列}{=}-\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_2 & a_2\\ 0 & 0 & a_3 & b_3\\ b_4 & a_4 & 0 & 0\end{vmatrix}\overset{交换2,4行}{=}\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 0 & 0\\ b_4 & a_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_3 & b_3\\ 0 & 0 & b_2 & a_2\end{vmatrix}$$

$$\overset{Laplace定理}{=}\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ b_4 & a_4\end{vmatrix}\cdot(-1)^{(1+2)+(1+2)}\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ b_2 & a_2\end{vmatrix}=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3).$$

注：牢记结论： $\begin{vmatrix}A_{m\times m} & C_{m\times n}\\ O_{n\times m} & B_{n\times n}\end{vmatrix}=|A_{m\times m}|\cdot|B_{n\times n}|$!

$$(4)原\underset{按第1列展开}{=}a\begin{vmatrix}a & b & 0 & 0\\ 0 & a & b & 0\\ 0 & 0 & a & b\\ 0 & 0 & 0 & a\end{vmatrix}+b(-1)^6\begin{vmatrix}b & 0 & 0 & 0\\ a & b & 0 & 0\\ 0 & a & b & 0\\ 0 & 0 & a & b\end{vmatrix}=a\cdot a^4+b\cdot b^4=a^5+b^5.$$

问：如此行列式扩展到 n 阶，结果又如何呢？

$$(5)原\underset{按第5行展开}{=}a(-1)^6\begin{vmatrix}0&0&b&a\\0&b&a&0\\b&a&0&0\\a&0&0&0\end{vmatrix}+b(-1)^{10}\begin{vmatrix}0&0&0&b\\0&0&b&a\\0&b&a&0\\b&a&0&0\end{vmatrix}.$$

$$=a\cdot(-1)^{C_4^2}a^4+b\cdot(-1)^{C_4^2}b^4=a^5+b^5.$$

问：如此行列式扩展到n阶，结果又如何呢？

注：牢记结论： $\begin{vmatrix} & & & a_1\\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{C_n^2}a_1a_2a_n.$

$$20.(1)左=\begin{vmatrix}a&b+c&c+a\\a_1&b_1+c_1&c_1+a_1\\a_2&b_2+c_2&c_2+a_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b&b+c&c+a\\b_1&b_1+c_1&c_1+a_1\\b_2&b_2+c_2&c_2+a_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a&b+c&c\\a_1&b_1+c_1&c_1\\a_2&b_2+c_2&c_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b&c&c+a\\b_1&c_1&c_1+a_1\\b_2&c_2&c_2+a_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b&c&a\\b_1&c_1&a_1\\b_2&c_2&a_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}.$$

（2）仿（1）的做法.

$$左=\begin{vmatrix}y&z+x&x+y\\x&y+z&z+x\\z&x+y&y+z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}z&z+x&x+y\\y&y+z&z+x\\x&x+y&y+z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y&z+x&x\\x&y+z&z\\z&x+y&y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}z&x&x+y\\y&z&z+x\\x&y&y+z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}y&z&x\\x&y&z\\z&x&y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}z&x&y\\y&z&x\\x&y&z\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}x&y&z\\z&x&y\\y&z&x\end{vmatrix}.$$

21.(1)原 $\overset{\text{其余各行都减去第1行}}{=}\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ b & -b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & \cdots & -b \end{vmatrix}$ $\underset{\text{按第1列展开}}{=}(a_1+a_2+\cdots+a_n-b)\begin{vmatrix} -b & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -b \end{vmatrix}$

$$\underset{\text{其余各列都加到第1列}}{=}\begin{vmatrix} a_1+a_2+\cdots+a_n-b & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & -b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -b \end{vmatrix}=(\sum_{i=1}^n a_i-b)\cdot(-b)^{n-1}=(-1)^{n-1}b^{n-1}(\sum_{i=1}^n a_i-b).$$

（2）原 $\overset{\text{其余各行都减去第1行}}{=}\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \cdots & a_2-a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \end{vmatrix}$

当 $n=1$ **时，原** $=a_1-b_1$**；当** $n=2$ **时，原** $=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 \end{vmatrix}=(a_1-a_2)(b_1-b_2)$**；当** $n\geq 3$ **时，原** $=0$.

(3)原 $$\underset{\substack{\text{第}i\text{列加到第}i-1\text{列} \\ i=n,n-1,\cdots,2}}{=}\begin{vmatrix} 1+2+3+\cdots+n & 2+3+\cdots+n & 3+4+\cdots+n & \cdots & n-1+n & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{按第1列展开}}{=}(1+2+3+\cdots+n)\begin{vmatrix} -1 & & \cdots & & \\ & -2 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & -(n-2) & \\ & & \cdots & & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)(-2)\cdots(-(n-1))=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-1)^{n-1}(n-1)!=(-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{2}.$$

（4）利用 P22 例 6 的结论. 原 $=[0+(n-1)\cdot 1](0-1)^{n-1}=(-1)^{n-1}(n-1)$.

$$(5)\text{原} \xlongequal[\text{其余各列都加到第一列}]{} \begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{按第1列展开}]{} n(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} n a_1 a_2 \cdots a_{n-1}.$$

注：教材提供的参考答案与此稍有 “不同”，这是因为 $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$.

$$22.(1)\text{左} \xlongequal{\text{其余各行都减去第1行}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-(n-1) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{按第1列展开}]{} \begin{vmatrix} x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-(n-1) \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1)).$$

解 $(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1)) = 0$ **得原方程的解为** $x = 1, 2, \cdots, n-1$.

$$(2)\text{左} \xlongequal[\substack{\text{第}i\text{列减去末列的}a_i\text{倍} \\ i=1,2,\cdots,n}]{} \begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ 0 & x-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ 0 & 0 & x-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n).$$

解 $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n) = 0$ **得原方程的解为** $x = a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$.

注：原行列式是 $n+1$ **阶的！**

23.（1）利用教材 P22 例 5 的结论.

$$左=\begin{vmatrix} 1+(a_1-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+(a_2-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+(a_3-1) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+(a_n-1) \end{vmatrix}$$

$$=(a_1-1)(a_2-1)\cdots 1+(a_n-1)(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-1})=\prod_{i=1}^{n}(a_i-1)(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-1}).$$

$$(2)左\underset{\substack{第i列的(-\frac{1}{a_{i-1}})倍加到第1列\\ i=2,3,\cdots,n+1}}{=}\begin{vmatrix} 1-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\cdots-\frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\underset{按第1列展开}{=}(1-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\cdots-\frac{1}{a_n})\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}=(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})a_1a_2\cdots a_n.$$

注：原行列式是$n+1$阶的！

$$(3)原=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-4} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 & a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{第i行的倍加到第i-1行\\ i=n,n-1,\cdots,2}}{=}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+a_{n-2}x^{n-3}+\cdots+a_2x+a_1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x^{n-2}+a_{n-1}x^{n-3}+a_{n-2}x^{n-4}+\cdots+a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x^4+a_{n-1}x^3+a_{n-2}x^2+a_{n-3}x+a_{n-4} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x^3+a_{n-1}x^2+a_{n-2}x+a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & x^2+a_{n-1}x+a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\overset{按第一行展开}{=}(x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0)\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0)\cdot(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n-1}$$

$$=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0.$$

注：教材 P22 例 5 的做法是常用且有效的计算行列式的方法.

24.(1) $\because A_{21}B_{11}+A_{22}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$，

$A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}$，

$\therefore AB=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ A_{21}B_{11}+A_{22} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & -3 & 9 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

（2）$\because A_1B_1=A_2B_2=A_3B_3=9$， $A_1B_2=A_1B_3=A_2B_1=A_2B_3=A_3B_1=A_3B_2=0$，

$$\therefore AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\ A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

25.（1）$|A_1 \quad 2A_3 \quad A_2|=-|A_1 \quad A_2 \quad 2A_3|=-2|A_1 \quad A_2 \quad A_3|=-2\times(-2)=4$.

(2) $|A_3-2A_1 \quad 3A_2 \quad A_1|=|A_3 \quad 3A_2 \quad A_1|+|-2A_1 \quad 3A_2 \quad A_1|=-|A_1 \quad 3A_2 \quad A_3|+0$
$=-3|A_1 \quad A_2 \quad A_3|=-3\times(-2)=6$.

26. $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}=A=EA=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 A \\ \varepsilon_2 A \\ \vdots \\ \varepsilon_m A \end{pmatrix}\Rightarrow A_i=\varepsilon_i A$， $i=1,2,\cdots,m$.

27.（1）**令** $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$，**则** $|A|=-2\neq 0$，**故** A **可逆**.

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

（2）**令** $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$，**则** $|A|=0$，**故** A **不可逆**.

（3）**令** $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，**则** $|A|=4\neq 0$，**故** A **可逆**.

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

（4）**令** $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，**则** $|A|=6\neq 0$，**故** A **可逆**.

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&3&0\\0&-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

注：伴随矩阵法仅在笔算求低阶矩阵的逆矩阵时较为方便.

28. （1）$\because \left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\1&2&3&0&0&1\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right)$，

$$\therefore \begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

（2）$\because \left(\begin{array}{ccc:ccc}2&2&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right)$，

$$\therefore \begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}.$$

（3）$\because \left(\begin{array}{cccc:cccc}0&0&0&1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&1&0&0\\0&1&1&1&0&0&1&0\\1&1&1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&0&0&-1&1\\0&1&0&0&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&0\end{array}\right)$，

$$\therefore \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-1&1\\0&-1&1&0\\-1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

（4）$\because \left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$，

$$\therefore \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(5) $\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{array}\right)$,

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

注：也可以利用矩阵的初等列变换求矩阵的逆矩阵： $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$.

29.（1） $X=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -2 & 9 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

(2)$X=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

（3） $X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(4)$AX+B=X\Rightarrow(E-A)X=B\Rightarrow X=(E-A)^{-1}B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

30.$\because (E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}-(A+A^2+\cdots+A^{k-1}+A^k)$
$=E-A^k=E-0=E,\therefore (E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

31. $A^2-3A-2E=0\Rightarrow A^2-3A=2E\Rightarrow A(A-3E)=2E\Rightarrow A\cdot\frac{1}{2}(A-3E)=E$

$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}(A-3E)$.

注：30 和 31 两题的做法表明：设法得到等式 $AB=E$ **是证明矩阵** A **可逆或求** A^{-1} **的有效途径.**

32.（1）在 $A^*A=|A|E$ **两边同时取行列式得** $|A^*|\cdot|A|=|A|^n$. $\because A$ **可逆，** $|A|\neq 0$， $\therefore |A^*|\neq 0$，

故 A^* **可逆，且** $(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$.

（2）$(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{10}&0&0\\\dfrac{1}{5}&\dfrac{1}{5}&0\\\dfrac{3}{10}&\dfrac{2}{5}&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$.

33. $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|\dfrac{1}{3}A^{-1}-2|A|A^{-1}\right|=\left|\dfrac{1}{3}A^{-1}-2\cdot\dfrac{1}{2}A^{-1}\right|=\left|-\dfrac{2}{3}A^{-1}\right|=(-\dfrac{2}{3})^3\left|A^{-1}\right|$

$=-\dfrac{8}{27}|A|^{-1}=-\dfrac{8}{27}\times 2=-\dfrac{16}{27}$.

注：矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 的有关性质是往年考研的热门考点. 读者应格外注意如下重要的恒等式： $AA^*=A^*A=|A|E$，**从它可导出 A^* 的许多性质.**

34. $\because (A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$， $\therefore A^{-1}$**是对称矩阵.**

35. 方法一： $B^m=(C^{-1}AC)^m=(C^{-1}A\underline{C)(C^{-1}}A\underline{C)}\cdots\underline{(C^{-1}AC)(C^{-1}}AC)=C^{-1}A^mC$.

方法二：（数学归纳法）当 $m=1$**时，显然成立.**

设命题对 $m=k$ **时成立，则** $B^{k+1}=B^kB=(C^{-1}A^k\underline{C)(C^{-1}}AC)=C^{-1}A^kAC=C^{-1}A^{k+1}C$.

36.（1） $A_{11}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$， $A_{22}^{-1}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$， $A^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11}^{-1}&O\\O&A_{22}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&2&0&0\\0&0&3&-5\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$.

（2）$A_{11}^{-1}=\begin{pmatrix}3&9&4\\-2&-5&-2\\-2&-7&-3\end{pmatrix}$， $A_{22}^{-1}=\dfrac{1}{2}$， $-A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}3&9&4\\-2&-5&-2\\-2&-7&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\\dfrac{5}{2}\\4\end{pmatrix}$，

$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11}^{-1}&-A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\\O&A_{22}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&9&4&-5\\-2&-5&-2&\dfrac{5}{2}\\-2&-7&-3&4\\0&0&0&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$.

（3）$A_{12}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，$A_{21}^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，$A^{-1}=\begin{pmatrix}O & A_{21}^{-1}\\ A_{12}^{-1} & O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

注：务必牢记这三种分块矩阵的逆矩阵的形式，特别是（1）和（3）两个结果.

37.（1）方法一：$\because \begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=0$，**且存在一阶非零子式，$\therefore$秩为 1.**

方法二：$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\therefore$**秩为 1.**

（2）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -5\\ 0 & 0 & -18\end{pmatrix}$，$\therefore$**秩为 3.**

（3）$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 2\\ 6 & -3 & 3\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\therefore$**秩为 1.**

（4）$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\therefore$**秩为 2.**

（5）$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 6 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 6 & 4 & 3\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -5 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\therefore$**秩为 3.**

（6）$\begin{pmatrix}2 & -1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2\\ 2 & 5 & -4 & -2 & 9\\ 3 & 3 & -1 & -1 & 8\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & -3 & 4 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\therefore$**秩为 3.**

注：求矩阵的秩的方法很多，随着以后各章的学习，读者应注意总结.